توانا بود هر که دانا بود

وزارت فرهنگ

کتاب جبر

برای سال دوم دبیرستانها

بها در تمام کشور ۱۶ ریال



۱۳۲٤

بنگاه علمی

فصل اول

حرفها و نشانه ها و دستورهای جبری

۱ - در علم حساب عدد برای سنجش یک چندی (کمیت) است نسبت به یکه (واحد) آن چندی مثلاً هرگاه بگوئیم درازای فلان پارچه ۷ متراست عدد ۷ مینماید که این درازا ۷ برابر یکه درازا یعنی متراست و همچنین هرگاه بگوئیم وزن این روغن $2\frac{3}{10}$ کیلواست عدد $2\frac{3}{10}$ مینماید که این وزن ۲ یکه و $\frac{3}{10}$ یکه وزن را دربردارد.

۲ - چنانکه میدانیم درمسئله های حساب عددهائی مانند عددهای بالا (۷ و $2\frac{3}{10}$) بکار میرود - مانند مسئله زیر:

مزد کارگری در روز ۱۲ ریال است پس از ۵ روز چقدر باو میرسد؟

ونیز در بهره کاری (ترابحه) مسئله هائی در روی عددهای مختلف که نمایش سرمایه وزمان ونرخ وسود است طرح میشود مانند مسئله زیر:

مطلوبست سود ۲۵۰۰ ریال سرمایه از قرار نرخ ۶٪ در مدت دوسال - که پس از محاسبه مختصری نتیجه میشود:

$$\frac{۲۵۰ \times ۶ \times ۲}{۱۰۰} = ۳۰ \text{ ریال}$$

ومیدانیم که این مسئله ومسئله های مانند آنرا بوسیلهٔ دستور

$$i = \frac{a \times r \times t}{100} \quad (۱)$$

حل میکردیم که در آن i بجای سود و a بجای سرمایه و r بجای نرخ و t بجای زمان گذارده شده ومعنای آن این است :

سود مساوی است با سرمایه ضرب در نرخ ضرب در زمان تقسیم بر ۱۰۰

از روی این دستور نه تنها مسئلهٔ بالا را میتوان حل نمود بلکه هر مسئله ای که مانند آن باشد نیز از روی این دستور حل میشود چنانکه اگر سرمایه ۱۲۰ ریال ونرخ ۹٪ و زمان ۵ سال باشد از روی دستور (۱) سود چنین میشود

$$= \frac{a \times r \times t}{100} = \frac{۱۲۰ \times ۹ \times ۵}{۱۰۰} = ۵۴ \text{ ریال}$$

در مسئلهٔ اول a مساوی ۲۵۰ ودر مسئلهٔ دوم مساوی ۱۲۰ میباشد ودر مسئله ها ممکن است بجای سرمایه های دیگر بکار رود همچنین است حرفهای دیگر که در دستور (۱)

بنابرین از بکار بردن حرفها در مسئله ها دستورهائی مانند دستور (۱) بدست میآید این دستورها که رابطه هائی هستند شامل حرف وعدد ونشانه (علامت) محاسبه ها ساده شده باسانی حل میگردد.

مثال - میدانیم مساحت مستطیل مساوی حاصل ضرب قاعده وارتفاع آنست . اندازهٔ قاعده را از روی یکهٔ درازا (مثلاً سانتیمتر) به a واندازهٔ ارتفاع را از روی همان یکه)

به b و مساحت را بحسب یکهٔ مساحت مثلاً سانتیمتر مربع) به S بنمائیم این دستور $S=a \times b$ نتیجه میشود که از روی آن میتوان مساحت هر مستطیلی را بدست آورد.

۳- از آنچه گفته شد معلوم میشود هرگاه در مسئله ای بجای عددها حرف گذاشته شود آن مسئله صورت کلی پیدا میکند و از حل آن میتوان مسئله های زیادی مانند آن را حل نمود و منظور عمدهٔ علم جبر و مقابله نیز همین است یعنی **ساده نمودن محاسبه ها و عمومیت دادن بحل مسئله ها بوسیله بکار بردن حرف ها و نشانه ها**

نشانه ها برای آسان نمودن حل مسئله و حرفها برای عمومیت دادن محاسبه ها بکار میروند

مثلاً ۱- **حرفها**- بیشتر در جبر حرفهای اول الفبای لاتین (a و b و c وغیره) را برای نمایش درازای دانسته (معلوم) و حرفهای آخر را (x و y و z وغیره) برای نمایش چندیهای مجهول بکار میبرند.

۲- که بخواهند چند مقدار مانند هم را بنمایند آنها را با یک حرف نموده اختلافشان را میرسانند زبری در بالا کمی بسمت راست و یا شماره ای در زیر کمی بسمت راست مینمایند مینویسند a' و a'' و a'''... (بخوانید a زبر یک و a زبر دو وغیره) و یا a_1 و a_2... (بخوانید a زیر یک و a زیر دو وغیره).

در شمار ۵- **نشانه ها** (علامتها)- نشانه ها معلوم میکنند عملها یا رابطه هائی که باید میان عددها و حرفها برقرار باشد- مهمترین آنها از این قرارند:

الف- نشانه های مخصوص چهار عمل اصلی- همان نشانه هائیست که در حساب

هم بکار میبرند

+ علامت افزودن عددی بر عدد دیگر است مانند $b + a$ و $5+2$ و $c+12$

- نمایش کاستن عددی از عدد دیگر است مانند $b - a$ و $5-2$ و $x-1$

× مینماید که باید دو عدد در هم ضرب شوند مانند $b \times a$ و $2 \times d$

حاصل ضرب دو عدد a و b را چنین نیز نویسند $b \cdot a$ و یا ab

مانند $d \cdot x$ و xy

: یا ـــ علامت تقسیم کردن عددی بر عدد دیگر است

مانند $b : a$ و یا $\frac{a}{b}$ و $\frac{x}{3}$ و $\frac{12}{y}$

ب - علامتهای مقایسه:

= نمایش مساوی بودن دو مقدار است مانند $b = a$ و $x = 2$

≠ علامت اختلاف دو مقدار است مانند

$$y \neq 5 \quad \text{و} \quad a+7 \neq a+1 \quad \text{و} \quad 4+3 \neq 10$$

> یا < - برای اینکه بنویسند عددی کوچکتر از عدد دیگر یا بزرگتر از آنست علامت > یا < را بکار میبرند چنانکه $b < a$ یا $a > b$ هر دو مینماید که عدد a بزرگتر از b میباشد

مانند $3 < 7$ و $9 > 5$

≥ یا ≤ این دو علامت را وقتی بکار میبریم که بخواهیم بنویسیم عدد اقل یا اکثر عددی مانند a مساوی عددی مانند b است مثلاً $b \leq a$ مینماید که عدد a بزرگتر از b و یا مساوی است

کم مساوی با آن میباشد و همین رابطه مینماید که b کوچکتر از a و یا اکثراً مساوی با آنست

ج - پرانتزها - وقتی مقدارهائی با نشانه های چهار عمل اصلی در داخل پرانتز[1] ( ) یا گروشه[2] [ ] و یا آکلاد[3] { } قرار گرفته باشند حکم مقدار واحد پیدا میکنند و این پرانتزها حاصل تمام عملهای بین این مقدارها را مینمایند مثلاً $a + (5-3)$ مینماید که باید به a حاصل پرانتز یعنی ۲ را افزود.

یادآوری - برای حساب کردن هر عبارتی که در آن جمع و تفریق و ضرب و تقسیم باشد باید نخست عمل های ضرب و تقسیم را بترتیبی که نوشته شده انجام داده سپس جمع و تفریق نمود

مثلاً

$$27 - 18 : 6 \times 2 + 5 \times 3 =$$

$$27 - 3 \times 2 + 15 =$$

$$27 - 6 + 15 = 36$$

بنابرین عبارت $7 + 2 \times 8 - 5$ با $(7+2) \times (8-5)$ تفاوت کلّی دارد چه

$$7 + 2 \times 8 - 5 = 7 + 16 - 5 = 18$$

و

$$(7+2) \times (8-5) = 9 \times 3 = 27$$

تمرین - این عبارتها را حساب کنید

$$48 : 6 - 4(7-2) : 10 + 5(4 + 3 \times 2)$$

۳۶ : ۴ : ۳ - ۲ (۵ - ۲) : ۶

[ ] - وقتی بخواهند حاصل عملهای چند پرانتز را بنمایند آنها را در داخل گروشه [ ] قرار میدهند.

چنانکه عبارت [(۵-۹)-۸] × ۳ معلوم میکند که باید عدد ۳ را در حاصل گروشه ضرب نمود. و حاصل گروشه اینطور بدست میآید که از عدد ۸ حاصل پرانتز یعنی ۴ را کم کنیم بنابرین حاصل گروشه مساوی ۴ و عبارت بالا مساوی ۱۲ میشود.

{ } - هرگاه مقصود نمایش حاصل عملهای چند گروشه باشد آنها را در داخل علامت آکلاد { } قرار میدهند.

چنانکه از عبارت {[(۵-۹)-۷] ۲-۱۵} - ۱۷ معلوم میشود که باید از عدد ۱۷ حاصل آکلاد را کاست. برای محاسبهٔ آکلاد حاصل گروشه یعنی ۳ را در ۲ ضرب مینمائیم و حاصل آن یعنی ۶ را از ۱۵ میکاهیم بنابرین حاصل آکلاد ۹ و عبارت بالا مساوی ۸ میشود

پرسش های سادهٔ شفاهی

۱- عبارتهای زیر را بخوانید

b - ۶ ; a × ۵ ; x : ۲ ; c - ۸ = ۵

۳x - y = ۱۸ ; d = ۲c + ۳f ; V = ۳/۴ πR³

۲- در هر یک از عبارتهای پائین چه عملی باید کرد؟

۲a - xy + b

(x - ۲y) / ۳

$(a+b)(a-b)$ ، $\frac{x}{a}-5(x+y)$ ، $2:[a-(2x+5)]$

۳ـ مقصود هر یک از رابطه های زیر را بیان کنید

$2x-5=ab$ $\qquad x>3$ $\qquad x<2a$

$ab<\frac{1}{4}$ $\qquad xy\geq a:5$ $\qquad a-2b\neq 3$

۴ـ حاصل هر یک از عبارتهای زیر را گوئید

$5(9-3):3$ $\qquad 3(2+5)$

$(12-8):(6-4)$ $\qquad (3+2)(9-7)$

$\sqrt{28-3}:5$ $\qquad \sqrt{(2+5)(9-2)}$

۵ـ مقدار عددی عبارت های زیر را حساب کنید

$4h^2$ وقتی که $h=4$ و یا وقتیکه $h=2$ باشد

ab^2 ، $a=2$ و $b=5$ باشد

$(m+n)^2$ ، $m=9$ و $n=4$ باشد

$(a-b)^2$ ، $a=4$ و $b=1$ باشد

$\sqrt{n}-x$ ، $n=25$ و $x=2$ باشد

۶ـ در مثلث S نمایش مساحت، a قاعده و h ارتفاع وارد بر آنست این رابطه را توضیح دهید:

$$S=\frac{1}{2}ah$$

۷- در مستطیلی S نمایش مساحت و p نصف محیط و a و b ضلعهای آن میباشند معنای این دو رابطه چیست؟

$S = ab \qquad 2p = 2(a+b)$

۸- V حجم کره و R شعاع آنست از $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ چه میفهمید؟

۹- مجموع دو عدد a و ۳ را نمایش دهید.

۱۰- مجموع دو عدد a و b را نمایش دهید.

۱۱- تفاضل دو عدد a و b را نمایش دهید.

۱۲- تفاوت مزد دو نفر ۲۰ ریال است بوسیله یک تساوی بنمائید.

۱۳- بنویسید که $a + 3$ مساوی سه برابر b است.

۱۴- بنویسید که $a + 3$ بزرگتر از دو برابر $b - 3$ است.

۱۵- درستی تساویهای زیر را بازاء مقدارهای مختلف x تحقیق کنید.

$x + x = 2x$

$x + x + 13 = 13 + 2x$

$3(x + 3) = 3x + 9$

بکار بردن نشانه و حرف

۶- اینک از دو مسئله زیر روشن میشود که چگونه بکار بردن حرف و نشانه سبب آسانی حل مسئله میگردد و در ضمن از حل حسابی مسئله و مقایسه آن با حل جبری برتری علم جبر بر حساب واضح میشود

مسئله ۱ - مجموع دو عدد ۲۵ و تفاضل آنها ۱۳ است آن دو عدد کدامند ؟

حل حسابی - بنابفرض عدد بزرگتر ۱۳ یکه بیش از عدد کوچکتر است و چون مجموعشان در دست است پس اگر از این مجموع ۱۳ را کم کنیم مانده یعنی ۱۲ دو برابر عدد کوچکتر میشود بنابرین عدد کوچکتر نصف ۱۲ یا مساوی ۶ است و چون ۱۳ بر آن بیفزائیم عدد بزرگتر بدست میآید

$$۶ + ۱۳ = ۱۹$$

حل جبری - عدد کوچکتر را که نمیدانیم به x فیمانیم عدد بزرگتر برابر $x + ۱۳$ و مجموعشان مساوی $(x + ۱۳) + x$ یا $۲x + ۱۳$ میشود و بنابفرض این مجموع ۲۵ است یعنی

$$۲x + ۱۳ = ۲۵$$

چون ۱۳ از دو طرف تساوی کم کنیم حاصل میشود .

$$۲x = ۱۲$$

واز آنجا

$$x = ۶$$

و بنابرین عدد بزرگتر مساوی $۱۹ = ۱۳ + ۶$ میشود .

مسئلهٔ ۲ - تفاوت مزد روزانهٔ دو کارگر ۲۰ ریال است و چون ۳ ریال بر مزد روزانهٔ هر یک افزوده شود مزد بیشتر ۳ برابر مزد کمتر میشود مزد هر یک چند است ؟

حل حسابی - میدانیم هرگاه بر کاسته و کاهش یاب مقداری مساوی افزوده شود مانده تغییر نمیکند پس در حقیقت میخواهیم مسئلهٔ زیر را حل کنیم :

تفاوت دو عدد ۲۰ و عدد بزرگتر ۳ برابر عدد کوچکتر است از اینجا معلوم میشود که عدد ۲۰ دو برابر عدد کوچکتر است بنابرین عدد کوچکتر مساوی ۱۰ و عدد بزرگتر ۳۰ میباشد که چون از هر یک ۳ کم شود مزد روزانه هر کارگر بدست میآید پس

مزد کوچکتر = ۷ ریال　　　　　　　　　مزد بزرگتر = ۲۷ ریال

حل جبری - چون مزد کمتر را که نمیدانیم x فرض کنیم مزد بیشتر مساوی x + ۲۰ میشود حال اگر به هر یک ۳ ریال بیفزائیم بنا بفرض مزد بیشتر سه برابر مزد کمتر میشود یعنی

$$۳(x+۳) = x+۲۰+۳$$

و یا

$$۳x+۹ = x+۲۳$$

از دو طرف تساوی یک دفعه ۹ و یک دفعه x کم میکنیم نتیجه میشود

$$۲x = ۱۴$$

و از آنجا

$$x = ۷$$

یعنی مزد کمتر ۷ ریال است و بنابرین مزد بیشتر مساوی ۲۷ = ۲۰ + ۷ ریال میشود

۷ - از مقایسه حل حسابی و جبری این دو مسئله مخصوصا از حل مسئله دوم می بینید که در حل هر مسئله براه حساب یکرشته عمل هائی بین مقدارهای دانسته انجام میشود که باید از روی فکر صحیح باشد تا بتوانیم بجواب برسیم و عموما در حل هر مسئله نکته باریکی موجود است که تا آن نکته برنخوریم مسئله حل نمیشود چنانکه در مسئله دوم ثابت ماندن تفاوت دو مزد گرچه نکته ایست آسان ولی همه کس ممکن است متوجه بآن نشود در صورتیکه در حل جبری لازم نیست باین نکته توجه شود

در جبر راه حل هر مسئله بر این روش است که صورت مسئله را بکمک حرفها و نشانه ها بنویسیم (پرسش های از ۹ تا ۱۲ صفحه ۸) و چنانکه دیدیم بکار بردن حرف و نشانه راه حل مسئله را بصورت ساده و روشن در آورده و بعلاوه بوسیله رابطه های ساده از نوشتن عبارتهای دراز و دراز آن دلیل میکاهد.

بکار بردن حرف برای عمومیت دادن محاسبه ها

۸ ـ گرچه روش بالا سبب ساده نمودن حل مسئله میشود و بآسانی مجهول بدست میاید ولی در پاسخ مسئله که عددی بیش نیست اثری از عملهائیکه موجب رسیدن به نتیجه شده است موجود نمیباشد بقسمی که برای حل مسئله های مانند آن باید همه عملهای بالا را از سر گرفت تا مجهول مسئله بدست آید.

این نقص را بوسیله بکار بردن حرف از میان برده اند از اینقرار:

مجهولها و همچنین دانسته های یک مسئله را بحرف نمایش داده و مسئله را بر حسب دانسته های کلی (حرفی) حل میکنند جواب مسئله که از این راه بدست میاید عبارتیست شامل کلیه عملهائیکه باید در روی مقدارهای دانسته انجام شود تا مجهول بدست آید. این عبارت را دستور نامند مانند دستور (۱) در بهره کاری صفحه ۲.

نخستین فایده دستور عمومیت دادن به حل یک مسئله کلی است که از روی آن میتوان همه مسئله ها را که مانند مسئله کلی بوده و فقط در مقدار عددی دانسته ها اختلاف داشته باشند حل نمود.

برای فهمیدن این مطلب مسئله کلی زیر را حل میکنیم.

مسئله - مجموع دو عدد S و تفاضل آنها d است آن دو عدد کدامند؟

چون عدد کوچکتر را به x و عدد بزرگتر را به y بنامیم این دو تساوی بدست میآید

$$x+y=S$$

$$y-x=d$$

از جمع این دو تساوی خواهیم داشت.

$$2y=S+d$$

و از آنجا $y=\frac{S+d}{2}$ و بنابرین $x=\frac{S-d}{2}$

پس جوابهای مسئله چنین است

$$(1)\quad \begin{cases} x=\frac{S-d}{2} \\ y=\frac{S+d}{2} \end{cases}$$

یعنی هرگاه مجموع دو عدد x و y مساوی S و تفاضل آنها یعنی $y-x$ مساوی d باشد y مساویست با نصف $S+d$ و x مساویست با نصف $S-d$

از روی این دستور میتوان مسئله های مانند مسئله بالا را حل نمود چنانکه اگر مجموع دو عدد ۱۲ و تفاضل آنها ۹ باشد آن دو عدد عبارتند از:

$$x=\frac{S-d}{2}=\frac{12-9}{2}=\ldots$$

$$y=\frac{S+d}{2}=\frac{12+9}{2}=\ldots$$

۹- فایده های دیگر دستور- بکار بردن دستورهای جبری علاوه برآنکه سبب عمومیت دادن حل مسئله میگردد فایده های دیگری نیز دارا است که در زیر بیان میکنیم.

الف - بکار بردن حرف و نشانه عموماً سبب اختصار در نوشتن یک قضیه و بخاطر سپردن آن میشود

مثلاً بجای اینکه بگوئیم اگر جای سازه (عامل) های ضرب را تغییر دهیم حاصل ضرب تغییر نمیکند کافی است این رابطه را بخاطر بسپاریم

$$ab = ba$$

وهمچنین بجای اینکه بگوئیم درازای محیط دایره برابر است با حاصل ضرب قطر در عدد π کافی است محیط دایره را بحرفی C وشعاع را بیکی از حرفها مانند R نموده این دستور را بنویسیم.

$$C = 2\pi R$$

ب- از یک دستور میتوان دستورهای دیگر بدست آورد

مثال- اگر v نمایش تندی ثابت متحرکی در یکه زمان باشد و مدت حرکت t اختیار گردد راهی که متحرک پیموده مساوی vt خواهد بود که چون آنرا به e بنامیم دستور زیر بدست میآید

$$e = vt \quad (1)$$

ازاین دستور دستورهای $v = \frac{e}{t}$ (۲) و $t = \frac{e}{v}$ (۳) نتیجه میشود

مثلاً اگر ماشینی با تندی ۳۶ کیلومتر در ساعت بمدت ۵ ساعت حرکت کرده باشد

راهی که رفته از دستور (۱) بدست میآید:

$$e = vt = 36 \times 5 = 180$$ کیلومتر

همچنین اگر اتوموبیلی ۱۶۰ کیلومتر را در ۴ ساعت پیموده باشد تندی آن از دستور (۲) معلوم میشود:

$$v = \frac{e}{t} = \frac{160}{4} = 40$$ کیلومتر در ساعت

و وقتی متحرکی مسافت ۴۸ کیلومتر را با تندی ثابت ۹ کیلومتر در ساعت پیموده باشد مدت حرکتش چنین است

$$t = \frac{e}{v} = \frac{48}{9}$$ ساعت = ۵ ساعت و ۲۰ دقیقه

ج - بوسیله ترکیب دو دستور میتوان نتیجه های مهم بدست آورد.

مثلاً اگر c و c' به ترتیب محیط های دو دایره بشعاع R و R' باشد این دو دستور را داریم:

$$c = 2\pi R$$

$$c' = 2\pi R'$$

از تقسیم این دو تساوی چنین نتیجه میشود $\frac{c}{c'} = \frac{R}{R'}$

یعنی نسبت محیط دو دایره بیکدیگر مساوی نسبت بین دو شعاع آنها است

پرسش های سادهٔ شفاهی

۱- عبارتهای زیر را بوسیلهٔ دستورهائی بنمائید:

الف - S مجموع دو عدد a و b است

ج - چون در یک برخه برخه شمار (صورت) و برخه نام (مخرج) را در یک عدد ضرب و یا بر یک عدد تقسیم کنیم مقدار برخه تغییر نمیکند

۲ - بین دو عدد a و b تساویهای زیر برقرار است هریک از آنها چه معنائی دارد؟

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) \quad a^2 - b^2$$

۳ - تحقیق کنید که تساویهای بالا صحیح است هرچه باشد a و b

۴ - این عبارتها را حساب کنید وقتیکه x مساوی ۴ و y مساوی ۵ باشد

$$xy^2 \qquad x^2y \qquad \frac{5x}{y}$$

$$\sqrt{x}+y \qquad \sqrt{x+y} \qquad \frac{5x-2y}{5}$$

$$2x^2-y^2 \qquad (y-x)(y+5)$$

$$(y+x)^2 \qquad y+2x-5)^2$$

تمرین

۱ - هریک از عبارتهای پائین را حساب کنید

۶ : ۲ + ۲ ‏ ‏ ‏ ‏ ۱۴ - (۱۶ - ۷) + ۱۲ - ۵

۲۴ (۲ + ۲) : ۸ - ۱ ‏ ‏ ‏ ‏ ۹ × ۲۳ - ۲ × ۶ - ۸ : (۵ - ۱)

$8^2 - 5^2$ ‏ ‏ ‏ ‏ ۱۰ - ۳) (۱۶ - ۳ × ۳ + ۸ : ۲)

$$۳ \times ۴۰ - ۶ \times ۲ + ۱۲ \times ۳۵ : ۲^۲ \times ۷ - ۳^۲ + (۵-۲)^۲$$

۲- مقدار عددی x و y را از روی دستورهای

$$y = m^۲ + m - ۱۱ \quad \text{و} \quad x = A^۲ - ۲A - ۵$$

بدست آورید وقتی که $A = ۱۰$ یا $A = ۸$ یا $A = ۵$ باشد

و $m = ۱۲$ یا $m = ۱۰$ یا $m = ۱۵$ باشد

۳- عبارت $(x-y) - \sqrt{x-y}$ را حساب کنید

وقتیکه $x = ۵$ و $y = ۳$ باشد

۴- در عبارت

$$\frac{a}{a+b} + \frac{a+b}{a} + \frac{b}{a+b} + \frac{a+b}{b} - \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$$

بجای a و b دو عدد بدلخواه گذارده مقدار عددی آنرا حساب و تحقیق کنید که مقدارهای

a و b هرچه باشد مقدار عددی این عبارت ۳ است

۵- a و b و c نمایش درازای (طول) پهلوها (ضلعها)ی یک سه بر (مثلث)،

و p نیمه پیرامون (محیط) و S مساحت آن میباشد مطلوبست محاسبهٔ مساحت سه بر از روی

دستور $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

درحالتهای مخصوص زیر

$a = b = c = ۲۵$

$a = b = ۳۰$ و $c = ۵۰$

$a = ۷۵$ و $b = ۶۵$ و $c = ۴۰$

۷- باغی است بشکل مستطیل بدرازای b وپهنای c که دور آنرا دیواری بکلفتی a وبلندی d کشیده اند ودرمیان باغ حوضی است بشکل دایره وبشعاع R حساب کنید حجم دیوار وسطح زمین باغ را

اول از روی a و b و c و d و R

دوم درین حالتها: b = ۸۵ متر c = ۳۸ متر a = ۰٫۴۰ متر d = ۱٫۷۵ R = ۴٫۱۰

b = ۱۱۰ متر c = ۴۰ متر a = ۰٫۳۵ d = ۱٫۵ R = ۵٫۲

۸- مطلوبست تعیین دستور کلی برای محاسبهٔ دو عدد وقتی که مجموعشان را بدانیم ویکی دو برابر دیگری باشد

مسئله های ۹ تا ۱۳ را بدو راه حساب وجبر حل نموده ونیز بوسیله بکار بردن حرف بجای دانستنیهای مسئله دستورهای کلی بدست آورید.

۹- پدری ۵۰ سال دارد وپسرش ۱۴ سال پس از چه مدت سال پدر سه برابر سال پسر میشود؟

۱۰- عددی پیدا کنید که $\frac{1}{2}$ آن بعلاوهٔ $\frac{1}{4}$ آن مساوی ۷ باشد.

۱۱- مطلوبست تعیین عدد دو پیکری (دو رقمی) بقسمی که مجموع دو پیکرش ۹ بوده وچون آنرا از وارونه اش کم کنند عدد ۲۷ بدست آید.

۱۲- شخصی مبلغی از سرمایه اش را از قرار ۵٪ بر ومابقی را که ۴۶۲۰ ریال بیش از مبلغ اولی است از قرار ۶٪ برابحه میگذارد وسود سه ماههٔ سرمایهٔ دوم ۴۹٫۴ ریال بیش از سود سه ماههٔ سرمایهٔ اول بوده است مطلوبست تعیین مبلغ سرمایه.

۱۳- چه مقدار نقرهٔ ویژه باید با ۱۵۰۰ گرم شمش بعیار ۰٫۸۲۵ آمیخته شود تا عیار شمش حاصل ۰٫۸۷۵ گردد؟

۱۴- میخواهیم مبلغ ۱۵۶۰ ریال را به دو قسمت کنیم بطوریکه یکی از آنها دو برابر دیگری شود.

۱۵- شخصی چند متر پارچه از قرار هر ۵ متری ۷ ریال خریده و از قرار هر ۷ متری ۱۱ ریال میفروشد و بدین ترتیب ۱۸ ریال سود میبرد چند متر پارچه خریده است؟

۱۶- شخصی مدت یکساعت و ۲۵ دقیقه با تندی ثابتی راه میرود و پس از آن مدت ۱۲ دقیقه با دو برابر تندی پیش حرکت میکند بر روی هم ۸۱۷۵ متر راه رفته است معین کنید تندی حرکتش را در مدت اول و مدت دوم

۱۷- پیاده ای از منزل خود در تهران برای رفتن بیک نقطه ای از شمیران ساعت ۵ صبح حرکت میکند و ساعتی ۴۵۰۰ متر میرود و پس از نیمساعت توقف در آن نقطه برمیگردد و در برگشتن هر ساعتی ۶۰۰۰ متر می پیماید و نیمساعت بعد از ظهر بمنزل خود میرسد معین کنید اول فاصله منزل آن شخص را از آن نقطه دوم در چه ساعتی بمقصد رسیده است!

۱۸- فاصله دو کان زغال ۲۲۰ کیلومتر است هر خروار زغال در کان نخست ۲۴٫۶۰ ریال و در دومی ۴۲٫۱۰ ریال قیمت دارد کرایه بردن هر دو خروار زغال در کیلومتر ۰٫۷۵ ریال است میخواهیم بین این دو کان کارخانه ای بنا کنیم بچه فاصله از کان نخست باید کارخانه ساخته شود تا زغالی که از این دو کان بآنجا میرسد دارای یک قیمت باشد؟

۱۹- پیراهن دوزی برای دوختن چند دست پیراهن و زیر شلواری ۶۷٫۵ متر مربع از یک پارچه نخی لازم دارد و میخواهد پس از شستن بدوزد در صورتیکه بدانیم پهنای این پارچه نخی که در بازار بدست میآورد ۸۰ سانتیمتر است و پس از شسته شدن $\frac{1}{16}$ پهنا و $\frac{1}{10}$ درازای آن آب میرود معین کنید چند متر

باید بخرد تا رفع احتیاجش بشود؟

۲۰- دانش آموزی در درس جبر سه مرتبه امتحان میدهد در امتحانهای اوّل و دوّم ۱۴ و ۱۵٫۵

گرفته است میخواهد معدل این سه امتحان ۱۶ شود چه نمره ای باید در امتحان سوم بگیرد؟

۲۱- معدل سه امتحان دانش آموزی ۱۵ است و باید یک امتحان دیگر بدهد میخواهد معدل چهار

امتحان ۱۵٫۵ باشد چه نمره ای باید در امتحان چهارم بگیرد؟

۲۲- برای تبدیل F درجهٔ فاهرنهایت (گرماسنج معمول انگلیسها است) به C درجه گرماسنج

یکصد درجه دستور زیر را بکار میبرند $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

پزشکی انگلیسی ببالین بیماری آمد و درجهٔ او را با گرماسنج فاهرنهایت گرفت و ۱۰۲ درجه شد معین

کنید چند درجه (از گرماسنج ۱۰۰ درجه) تب دارد؟

۲۳- پیغمبر اسلام در سال ۶۲۲ میلادی از مکه بمدینه هجرت کرد. سالهای میلادی خورشیدی است

و تاریخی که در ایران پیش از عصر پهلوی بکار میرفت هجری قمری بود. درصورتیکه بطور تقریب ۱۰۰

سال قمری برابر با ۹۷ سال خورشیدی باشد دستور تبدیل M سال میلادی را به H سال

هجری قمری (بطور تقریب) پیدا کنید.

۲۴- برحسب تصمیم باشگاه سوارکاران هرسال در آخرین روز اسب دوانی تهران سه جایزه

به بهترین اسبهای برنده داده میشود. جایزهٔ اسب نخست باید چهار برابر و جایزهٔ دوّم دو برابر جایزهٔ

سوم باشد اگر ۱۷۵۰۰ ریال برای سه جایزه تخصیص داده باشند مبلغ هریک چقدر است؟

۲۵- A ریال را بنسبت p و q تقسیم کنید.

۲۶- دو نفر شریک میخواهند K ریال سود را بین خود تقسیم کنند میدانیم سرمایه اولی a ریال در مدت t سال و سرمایه دومی b ریال در مدت t' سال در شرکت بوده است سهم هریک چه میشود؟

۲۷- تندی صوت در هوائیکه بگرمی t باشد از روی دستور $v = 332\sqrt{1+0{,}00365\,t}$ بدست میآید معین کنید تندی صوت (v) را در هوای ۳۵

۲۸- از روی دستور بالا معین کنید گرمی هوا را بالفرض اینکه بدانیم تندی صوت ۳۳۸ متر باشد.

۲۹- میدانیم وزن یک جسم مساویست با حاصل ضرب حجم آن جسم در وزن مخصوصش اولاً این قضیه را بوسیله یک رابطه جبری بنویسید ثانیاً اگر وزن جسم را به P و حجمش را به V و وزن مخصوص را به D بنامیم در حالتی که $V = 12$ سانتیمتر مکعب و $D = 3{,}5$ باشد وزن آنجسم را حساب کنید و نیز در حالتیکه $P = 120$ کیلوگرم و $D = 1{,}8$ باشد حجم آنرا بدست آورید.

فصل دوم

الف- عدد جبری

۱۰- چندیهائی (کمیتهائی) که دارای دو سو میباشند- بیشتر در زندگانی بمحاسبه چندیهائی (کمیتهائی) برمیخوریم که دارای دو سو میباشند

مثال ۱- دفتر حساب روزانه هر تجارتخانه شامل پولهائیست که وارد صندوق تجارتخانه

شده و نیز شامل پولهائیست که از طرف تجارتخانه پرداخته شده است گرچه هر کدام مبلغی پولند ولی در معنی با یکدیگر اختلاف کلی دارند .

مثال ۲- از خانه بدبیرستان میروید و از دبیرستان همان راه را برمیگردید اینجا دو راه مساوی پیموده اید ولی یکی شما را بدبیرستان نزدیک میکند و دیگری شما را از آن دور مینماید. بنابرین این دو مسافت دارای دو سوی مخالفند .

مثال ۳- درس جبر شما دو ساعت بظهر مانده است و یا آنکه ورزش شما دو ساعت از ظهر گذشته است این دو مدت نیز دارای دو سوی مخالفند .

۱۱- عددهائیکه در حساب بکار میرود برای نمودن اینگونه چندیها کافی نیستند

وقتی مجهول یک مسئله از چندیهائی است (کمیتهائیست) سودار باید علاوه بر محاسبه مقدار عددی مجهول سوی آنرا تعیین کرد .

عددهای حسابی تنها مقدار عددی مجهول را بدست میدهد بدون اینکه سوی آنرا معین کند و اگر بخواهیم بکمک عددهای حساب سوی چندیها نیز معلوم شود ناچاریم الفاظی بکار برده جمله بندی کنیم .

مثلاً بگوئیم ۵ ریال بستانکاریم یا ۵ ریال بدهکاریم که دو لفظ **بستانکاریم** و **بدهکار** سوی چندی را معلوم میکند . بنابرین عددهای حسابی به تنهائی برای نمایش چندیهائیکه دارای دو سوی مخالفند کافی نمیباشد

درجبر برای اندازه گرفتن اینگونه چیزها عددهائی درست کرده اند که هم مقدار عددی و هم سُوی چیزی را مینماید این عددها همان عددهای حسابند که بر آنها یکی از دو نشانهٔ + یا — مقدّم شده باشد.

مثال - اگر بطور کلی مبلغ بستانی (طلب) را بعلامت + و بدهی را بعلامت — بنمائیم در مثال پیش بجای اینکه بنویسیم ۵ ریال بستانکاریم کافیست بنویسیم ۵ + ریال و بجای آنکه بنویسیم ۵ ریال بدهکاریم بنویسیم ۵ - ریال

میتوان گفت که دارائی ما ۵ + ریال یا ۵ - ریال میباشد

مثال دیگر - متحرکی از نقطهٔ ٥ واقع بر خط مستقیم x'x حرکت میکند فرض میکنیم ۹ متر حرکت کرده باشد میخواهیم معلوم کنیم کجا رسیده است - برای این مقصود باید بدانیم بطرف راست ٥ حرکت کرده است یا بطرف چپ.

x' ——— ٥ ——— x

چنانکه می بینیم عدد ۹ به تنهائی برای تعیین جای متحرک کافی نیست بلکه باید بر این عدد یکی از دو لفظ بطرف راست یا بطرف چپ را اضافه کرد تا جای متحرک معلوم شود.

حال اگر راهی را که متحرک بسمت راست می پیماید با نشانهٔ + و مخالف آنرا با نشانهٔ — بنمائیم و قسمتی گوئیم ۹ + متر پیموده معلوم میشود که این متحرک در فاصلهٔ ۹ متری نقطهٔ ٥ و در سمت راست آن واقع است همچنین اگر ۹ - متر پیموده باشد معنای آن این است که متحرک به ۹ متری ٥ در سمت چپ آن رسیده است.

مثال دیگر- اگر سطح اقیانوس را مبداء ارتفاع فرض کنیم و ارتفاع نقاط بالای آنرا بانشانهٔ + ونقاط پائین تر را بانشانهٔ - بنمائیم وقتیکه بگویند بلندی یک نقطهٔ ۲۰۰+ متر است معلوم میشود که آن نقطه ۲۰۰ متر بالاتر از سطح دریا واقع است.

و وقتی گفتیم بلندی دریای خزر ۲۰- متر است معلوم میشود که سطح دریای خزر ۲۰ متر از سطح اقیانوس پائین تر است.

مثال دیگر- اگر درجهٔ حرارت مکانی °۱۵- باشد معلوم میشود که آن مکان ۱۵ درجه سردتر از یخی است که درحال آب شدن است.

۱۲- عدد های جبری- هر عدد حسابی راکه نشانهٔ + جلوی آن باشد **عدد مثبت** و هر عدد حسابی راکه نشانهٔ - جلوی آن باشد **عدد منفی** مینامند.

مانند $+\frac{2}{3}$ (خوانده میشود بعلاوه دو سوم) و $-\sqrt{7}$ (منهای ریشهٔ دوم هفت)

عددهای مثبت و عددهای منفی را **عددهای جبری** گویند.

۱۳- عددهای حسابی را **قدر مطلق** عددهای جبری گویند.

چنانکه $\sqrt{3}$ قدر مطلق دو عدد جبری $+\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ است وقرار براین داده اندکه قدر مطلق عدد جبری a را چنین نویسند $|a|$

پس $|-2| = 2$

۱۴- تساوی دو عدد جبری - دو عدد جبری وقتی مساویندکه دارای یک قدر مطلق و یک نشانه باشند.

۱۵- دو عدد قرینه - دو عدد جبری که دارای یک قدر مطلقند ممکن است مساوی نباشند مانند ۷- و ۷+

هرگاه قدر مطلق دو عدد مساوی ولی نشانهٔ آنها مختلف باشد آن دو عدد را قرینهٔ یکدیگر گویند مانند ۷- و ۷+ ؛ $x-$ و $x+$ ؛ $b+$ و $b-$

۱۶- غالباً در عمل نشانهٔ + را از جلوی عددهای جبری برداشته آنها را بدون نشانه نویسند مثلاً بجای ۵+ و $\sqrt{3}+$ و $a+$ فقط ۵ و $\sqrt{3}$ و a نویسند.

ولی هیچوقت نباید عددهای منفی را بدون نشانهٔ - نوشت.

پرسش‌های سادهٔ شفاهی

۱- شمارهٔ شاگردان کلاسی ۲۵ است ۷ نفر آنان غائبند حاضران و غائبان را با عدد جبری بنمائید.

۲- دو متحرک از نقطهٔ o بر خط راستی حرکت مینمایند موضع‌های این دو متحرک را بوسیلهٔ زینه بندی و مدرج نمودن خط و همچنین فاصله‌های آن دو را از یکدیگر در هر یک از حالتهای زیر معین کنید:

اوّلی ۸+ متر و دوّمی ۷+ متر پیموده

« « ۹- « « « ۱۲-

« ۵- « « « ۲+

« « ۲+ « « « ۶-

اولی ـ ۴ متر و دومی ۴+ متر پیموده

+۵ . . +۵ . .

۳ - بلندترین نقطه های کره زمین قله کوه اورست است به بلندی ۸۸۲۰ متر و ژرف‌ترین نقطه های
...ین نقطه ای از ته اقیانوس ساکن است به ژرفای (عمق) ۹۵۰۰ متر این دو طول را بعد جبری نمایید

۴ - گرماسنجی ۱۵ زینه (درجه) را نشان میدهد - اگر سطح اکنون (مایع) درونی آن ۱۰ زینه
۱۷ زینه یا ۱۵ زینه پائین بیاید چه زینه را نشان خواهد داد؟

۵ - گرماسنجی در ساعت ۷ صبح ۱۰ - زینه را نشان میدهد اگر هر ساعتی که میگذرد سطح اکنون
...ونی آن سه زینه بالا بیاید معین کنید در ساعتهای ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ صبح چه زینه ای را
...نشان خواهد داد؟

۶ - تجارتخانه ای در یک روز بشرح پائین داد و ستد نموده است.

نخستین بار - دو دریافتی بمبلغ ۴۵۰ ریال و ۲۰۰ ریال داشته است.

بار دوم - ۳۵۰ ریال و ۵۰۰ ریال پرداخته است.

بار سوم - ۶۵۰ ریال پرداخته و ۹۰۰ ریال دریافت داشته است.

بار چهارم - ۳۰۰ ریال دریافت داشته و ۷۵۰ ریال پرداخته است.

بار پنجم - ۲۰۰ ریال دریافت داشته و ۲۰۰ ریال پرداخته است.

اولاً مطلوبست نمایش پولهای دریافتی و پرداختی تجارتخانه بعدهای جبری

ثانیاً نتیجه هر بار داد و ستد را بعد جبری نمائید

ب - جمع عددهای جبری

مثال ۱ - باربری در یک روز دو دفعه بار برده است یکدفعه ۵ ریال و یکدفعه ۷ ریال مزد گرفته ضمناً یکدفعه ۵ر۱ ریال و دفعهٔ دیگر ۷ر۰ ریال خرج کرده است درآمد و هزینه‌های او را با عددهای جبری بنمائید.

اگر درآمد را بعدد مثبت و هزینه را بعدد منفی بنمائیم دو عدد ۵+ و ۷+ نمایش درآمدها و دو عدد ۵ر۱- و ۷ر۰- نمایش هزینه‌های او میباشند و روشن است که مجموع چند درآمد درآمد است یعنی **مجموع چند عدد مثبت عددیست مثبت** پس مجموع درآمدهای او یعنی مجموع ۵+ و ۷+ عدد ۱۲+ خواهد بود یعنی

$$(+5)+(+7)=+12$$

و چون مجموع چند هزینه هزینه است بنابرین **مجموع چند عدد منفی عددیست منفی** پس مجموع هزینه‌های او یعنی مجموع دو عدد ۵ر۱- و ۷ر۰- عدد ۲ر۲- میباشد یعنی

$$(-1{,}5)+(-0{,}7)=-2{,}2$$

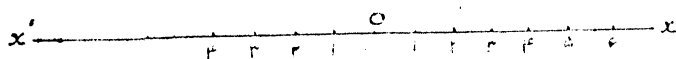
ازین مثال قاعدهٔ زیر نتیجه میشود:

۱۷- قاعده - مجموع دو یا چند عدد جبری هم نشانه عددیست جبری که قدر مطلقش مساوی مجموع قدر مطلقهای آن چند عدد بوده و نشانه‌اش با آنها یکی باشد:

$$(+11)+(+7)=+18$$

$$\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{4}{5}$$

۱۸- بر روی خط راست $x'x$ بدلخواه نقطه ای مانند O برگزیده و از دو سمت آن قطعه های متساوی براین خط جدا میکنیم حال اگر فاصله های نقطه O را از نقطه های واقع در سمت



راست آن بعدد مثبت بنامیم فاصله های نقطه O از نقطه های واقع در سمت چپ بعدد منفی نمایش داده خواهد شد مثلاً نقطه ای که فاصله اش از O ۳+ است نقطه A است و نقطه ایکه



فاصله اش ۳- است نقطه B میباشد.

میدانیم که مجموع دو عدد ۲+ و ۳+ عدد ۵+ است - از روی خط زینه دار بالا هم میشود این مجموع را بدین قسم بدست آورد که از نقطه ۲ شروع کرده باندازه سه قطعه بسمت راست برویم تا به نقطه ۵ برسیم یعنی $+2 + (+3) = +5$

همچنین اگر بخواهیم مجموع ۳- و ۴- را حساب کنیم کافیست که از نقطه ۳- شروع کرده ۴ قطعه بسمت چپ بشماریم تا به نقطه ۷- برسیم یعنی $-3 + (-4) = -7$

میدانیم تفاضل ۳-۵ مساوی ۲ است از روی خط بالا هم میتوانیم این عمل تفریق را باین شکل انجام داد که از نقطه ۵ شروع کرده باندازه ۳ قطعه بسمت چپ برویم درینصورت بنقطه ۲ میرسیم بهمین ترتیب اگر از عدد ۵ پنج پایه بکاهیم به نقطه O میرسیم - بطور کلی ای تفریق این قاعده را داریم:

برای کم کردن عدد مثبت a از عدد مثبت b کافی است از نقطه b شروع

کرده باندازهٔ a قطعه بسمت چپ برویم تا بنقطهٔ a-b برسیم.

اگر بخواهیم مطابق این قاعده عدد ۵ را از ۴ کم کنیم به نقطهٔ ۱- میرسیم یعنی

۴ - ۵ = -۱

ولی چنانکه میدانیم این تفریق در حساب ممکن نیست زیرا ۵ بزرگتر از ۴ است و فقط میتوان چهار یکهٔ ۵ را از یکه های ۴ کم کرد و یک یکه زیاد است که نمیتوانیم کم کنیم و در حقیقت ۱- نمایش همین یک یکه کم نشده است و همچنین در تفریق ۲- = ۵ - ۳ عدد ۲- نمایش ۲ یکهٔ ۵ است که نتوانستیم از ۳ کم کنیم

مثال - اگر درآمد شخصی ۵ ریال و هزینه اش ۷ ریال باشد گوئیم دارائی او ۷ - ۵ یعنی ۲- ریال است - مطابق شرح بالا معنای آن این است که هزینهٔ او ۲ ریال بیش از درآمدش است

پرسش های سادهٔ شفاهی

بوسیلهٔ خط زینه دار بالاعمل های زیر را انجام دهید

۴ + ۳   ۶ - ۴   ۷ - ۷

۳ - ۷   ۴ - ۹   ۵ - ۵

تبصره - روشن است که مثلاً برای کم کردن ۶ از ۱۵ میتوانیم یکه های ۶ را یکی یکی از ۱۵ کم کنیم تا به ماندهٔ ۹ برسیم میتوان نیز یک قسمت از یکه های ۶ مثلاً ۴ یکه آنرا اول تفریق کرد تا بشود ۱۱ و بعد ۲ یکهٔ دیگر را از ۱۱ کم کرد تا به ۹ برسیم و در هر تفریقی میتوان مانند این مثال رفتار کرد

مثلاً برای کم کردن ۱۵ از ۶ اگر مستقیماً عمل کنیم به مانده ۹- میرسیم:

۶ - ۱۵ = -۹

ومیتوان مثلاً اول ۶ یکه ۱۵ را از ۶ کم کرد تا بشود صفر و بعد ۹ یکه دیگر را از صفر کم میکنیم تا به ۹- برسیم یعنی

۰ - ۹ = -۹

همچنین میتوان اول ۷ یکه ۱۵ را از ۶ کم کرد تا بشود ۱- و بعد ۸ یکه دیگر را از ۱- تفریق کرد تا به ۹- برسیم یعنی

-۱ - ۸ = -۹

و نیز میتوانیم اول ۸ یکه کم کنیم تا بشود ۲- و بعد ۷ یکه دیگر را

-۲ - ۷ = -۹ و مانند اینها

و این تفریق ها هم از روی خط زینه دار بالا بآسانی انجام میشود - مثلاً برای کم کردن ۷ از ۲- کافیست از نقطه ۲- شروع کرده هفت قسمت بطرف چپ برویم تا به نقطه ۹- برسیم

پرسش های ساده شفاهی

بوسیله خط زینه دار بالا عمل های زیر را انجام دهید:

۳ - ۲   ۰ - ۲   -۳ - ۲

۳ - ۵   -۳ - ۲   ۰ - ۵

۱۹- چون غرض از کم کردن عدد b از عدد a پیدا کردن عددیست مانند x که چون با b جمع شود عدد a بدست آید بنابرین از تفریق

$2-5=-3$ نتیجه میشود که $5+(-3)=2$

$-3-2=-5$ « « $2+(-5)=-3$

$0-5=-5$ « « $5+(-5)=0$

از تساویهای طرف چپ قاعدهٔ زیر بدست میآید:

۲۰- قاعده - مجموع دو عدد جبری که نشانهٔ آنها یکی نیست عدد جبری که قدر مطلقش مساوی تفاضل قدر مطلقهای آن دو عدد بوده نشانه اش نشانهٔ عددیست که قدر مطلقش بیشتر است

۲۱- نتیجهٔ اول - مجموع دو عدد قرینه صفر است

نتیجهٔ دوم - چون مجموع دو عدد قرینه عددیست که قدر مطلقش صفر بوده و علامتش بدلخواه + یا - میباشد بنابرین

صفر هم عددیست جبری که میتوان بر آن + یا - مقدم داشت و یا آنرا بدون نشانه نوشت

نتیجهٔ سوم - حاصل جمع هر عدد جبری با صفر خود آن عدد است .

مثال ۱- شخصی ۱۵۰ ریال بستانکار است و ۱۲۰ ریال بدهکار مبلغ دارائی او

[illegible]

معلوم است که این شخص ۱۲۰- ۱۵۰= ۳۰ ریال بستانکار است چون مبلغ بدهی و را بعد
جبری منفی و مبلغ بستانی او را بعد جبری مثبت بنامیم و چون مجموع دو عدد جبری ۱۵۰+ ۱۲۰- موافق
قاعده بالا ۳۰+ میشود بنابرین برای **تعیین دارائی شخص باید مبلغهای بدهی و بستانی را
که بعد جبری نموده شده اند با یکدیگر جمع نمود**

مثال ۲ - شخصی برخط راستی از مبداء o ۲۷۰ متر بطرف راست (که مثبت گرفته میشود)
را پیموده و بعد ۳۰۰ متر در جهت مخالف رفته میخواهیم بدانیم چه فاصله از نقطه o رسیده و در کدام
طرف آن واقع است ؟

باسانی از روی یک شکل معلوم میشود که این شخص بفاصله ۲۷۰-۳۰۰ یعنی به ۳۰ متری
سمت چپ o رسیده است .

ولی چون دو عدد جبری ۲۷۰+ و ۳۰۰- را باهم جمع کنیم از روی قاعده بالا (۲۱)
نتیجه میشود

(-۳۰۰) + (+۲۷۰) = -۳۰

بنابرین برای تعیین موضع متحرک باید راههای پیموده شده در جهت های مختلف را که با عددهای
جبری نموده ایم با هم جمع کنیم

۲۲- تبصره - در همین مثال بجای اینکه متحرک اول ۲۷۰+ متر راه رود و بعد ۳۰۰- متر
اگر اول ۳۰۰- متر و بعد ۲۷۰+ متر میرفت بهمان نقطه میرسید یعنی نتیجه یکی میشد - پس

(+۲۷۰) + (-۳۰۰) = (-۳۰۰) + (+۲۷۰)

یعنی در جمع دو عدد جبری میتوانیم جای آندو عدد را عوض کنیم بدون اینکه مجموع جبری تغییر کند

۲۳- جمع چند عدد جبری - برای پیدا کردن حاصل جمع عددهای ۲+ و ۷- و ۸+ و ۶- که بصورت (۶-)+(۸+)+(۷-)+۲+ نوشته میشود قرار بر اینست که ابتدا مجموع دو عدد اولی را حساب کرده آنرا با سومی جمع کنیم و بعد حاصل را با چهارمی جمع نمائیم تا حاصل جمع کل بدست آید.

+۲ +(-۷) + (+۸) + (-۶) =

-۵ + (+۸) + (-۶) =

+۳ + (-۶) = -۳

عدد ۳- را مجموع جبری عددهای بالا گویند

۲۴- خواص جمع - الف - چنانکه دیدیم میتوان در جمع دو عدد جبری جای آن دو عدد را تغییر داد در جمع چند عدد جبری هم میتوان جای آنها را بدلخواه تغییر داد

مثلاً این تساوی برقرار است

۸+(-۲)+(-۴) = -۴ + (+۸) + (-۲)

زیرا از روی قرارداد بالا (۲۳) بترتیب خواهیم داشت

۸+(-۲)+(-۴) = ۵ + (-۴) = +۱

-۴ + (+۸) + (-۲) = +۴ + (-۲) = +۱

ب - در جمع چند عدد جبری میتوان بجای دو یا چند عدد آنها مجموع جبریشان را قرار داد

مثلا تساوی زیر برقرار است

$$(-۷) + (+۸) + (-۳) = [(-۷) + (-۳)] + (+۸)$$

مطابق قرارداد مجموع جبری طرف اول ۲- و طرف دوم مساوی حاصل جمع کروشه است با ۸+ یا (+۸) + (-۱۰) یعنی ۲-

۲۵- نتیجهٔ ۱- از دو خاصیت بالا نتیجه میشود که در جمع جبری چند عدد میتوان دو عدد قرینه را حذف نمود بدون اینکه مجموع جبری تغییر کند

۲۶- نتیجه ۲- میتوان برای محاسبهٔ مجموع جبری چند عدد عددهای مثبت و عددهای منفی را جداگانه جمع نمود تا این مجموع مبدل به مجموع دو عدد جبری شود یکی مثبت و یکی منفی مثلاً

$$+۴ + (-۷) + (+۸) + (-۳) + (-۶) =$$

$$+۴ + (+۸) + (-۷) + (-۳) + (-۶) = +۱۲ + (-۱۶)$$

$$= -۴$$

بوسیله این قاعده میتوان عمل جمع عددهای جبری را تندتر انجام داد

پرسش های سادهٔ شفاهی

۱- حاصل جمعهای زیر را از روی قاعده های جمع بدست آورده بوسیلهٔ خط زینه دار بند ۱۸ درستی نتیجه را تحقیق کنید.

۵ + (−۲)　　۲ + (−۵)　　۵ + (+۲)

−۷ + (+۱)　　−۴ + (−۱)　　−۳ + (−۲)

۰ + (−۳)　　−۸ + (+۹)　　−۶ + (+۶)

۲- حاصل جمعهای زیر را حساب کنید

−۲٫۵ + (−۳٫۵)　　$+\frac{۲}{۳} + (+\frac{۷}{۳})$

۳٫۵ + (−۵٫۵)　　$+۱\frac{۲}{۵} + (-۱\frac{۱}{۵})$

(−۱۰) + (+۱۵) + (−۵)　　−۷ + (−۲) + (−)

۳- دانش آموزی در راه خانه بمدرسه ۱۵۰ متر از خانه دور میشود و در همان راه ۷۵ متر برگشته باز ۲۰۰ متر بطرف مدرسه میرود معلوم کنید بچه فاصله از خانه رسیده است.

۴- شخصی دو بدهی دارد یکی ۱۵ ریال و دیگری ۱۰ ریال در عوض ۱۲ ریال بستانکار است مقدار دارائی او را تعیین کنید.

۵ - سه ساعت بظهر مانده است ۱۵ ساعت دیگر چه ساعتی است و یا آنکه چهار ساعت پیش چه ساعتی بوده؟

۶ - در هر یک از تساویهای زیر بجای علامت ؟ عدد مناسب بگذارید تا تساوی برقرار باشد

−۹ + ؟ = −۷　　۵ + ؟ = ۱۰

۱۵ + ؟ = ۳　　−۱۱ + ؟ = −۵

−۱۲ + ؟ = ۶　　۸ + ؟ =

$-8 + ? = 0$ $\qquad$ $7 + ? = -11$

ج - تفریق عددهای جبری

۲۷- تعریف - چنانکه درحساب دیده ایم غرض از کم کردن عدد جبری b (کاسته یا مفروق) از عدد جبری a (کاهش یاب یا مفروق منه) پیدا کردن عددیست جبری مانند d (مانده) که چون با b جمع جبری شود مجموع مساوی a شود.

و آنرا چنین نویسند $\qquad a - b = d$

این تعریف همانست که درحساب دیده ایم

مثال -

$+7 - (+3) = +4$ $\quad$ زیرا $\quad$ $+3 + (+4) = +7$

$+3 - (+7) = -4$ $\quad$ « $\quad$ $+7 + (-4) = +3$

$-9 - (-6) = -3$ $\quad$ « $\quad$ $-6 + (-3) = -9$

$-19 - (+11) = -30$ $\quad$ « $\quad$ $+11 + (-30) = -19$

$+11 - (-19) = 30$ $\quad$ « $\quad$ $-19 + (+30) = +11$

پرسش های سادهٔ شفاهی

۱- هریک از عددهای سمت راست را مطابق تعریف [illegible] ت چپ کم کنید (یعنی در هریک از مثالهای ذیل عددی تعیین کنید که چون با کاسته جمع شود کاهش یاب بدست آید)

۵ از ۱۱ $\qquad$ -۵ از ۱۱ $\qquad$ ۱۱ از -۵

۷ از ۴   -۵ از ۵   ۵ از -۵

۷ از ۵   -۵ از ۵   ۹ از ۵

+۳ از ۵   -۱۵ از ۱۱   -۲ از ۰

۰ از -۳   ۰ از ۸   ۸ از ۰

۲- در مثالهای بالا نشانهٔ عدد کاسته را تغییر داده (یعنی اگر + است - و اگر - است + نموده) با کاهش یاب جمع کنید و در هر یک از مثالها تحقیق کنید که این مجموع مساوی تفاضل دو عدد مفروض است

۲۸- موافق تعریف تفریق عدد d وقتی مساوی باندهٔ $a - b$ است که $b + d$ مساوی a باشد:

$$b + d = a$$

اگر بر دو طرف این تساوی قرینهٔ b (کاسته) را بیفزائیم نتیجه میشود

$$b + d + (-b) = a + (-b)$$

یا

$$d = a + (-b)$$

یعنی برای بدست آوردن d یا باندهٔ $a - b$ کافیست با a (کاهش یاب) قرینهٔ b (کاسته) را جمع کنیم

ازین جا قاعدهٔ تفریق بدست آمد:

قاعده- برای تفریق دو عدد جبری کافیست قرینهٔ کاسته را با کاهش یاب جمع کنیم تا مانده بدست آید.

در قسمت ۲ پرسش های بالا مانده ها را از روی همین قاعده بدست آوردیم .

۲۹ - از اینجا معلوم میشود که در جبر عمل تفریق تبدیل به جمع میشود بنابرین تفریق دو عدد جبری همواره ممکن بوده دارای هیچ شرطی نیست درصورتیکه در حساب این عمل وقتی ممکن است که کاهش یاب بزرگتر از کاسته یا دست کم مساوی آن باشد .

مثال -

- ۵ - (+ ۱۱) = - ۵ + (- ۱۱) = - ۱۶

- ۵ - (- ۵) = - ۵ + (+ ۵) = ۰

۰ - (+ ۳) = ۰ + (- ۳) = - ۳

۰ - (- ۳) = ۰ + (+ ۳) = + ۳

پرسش های سادهٔ شفاهی

هر یک از عددهای سمت راست را موافق قاعدهٔ تفریق از عدد سمت چپ کم کنید .

۵ از ۱۱ ‏ ‏ ‏ ‏ -۵ از ۱۴ ‏ ‏ ‏ ‏ ۹ از ۹

۳ از ۸ ‏ ‏ ‏ ‏ -۸ از ۳ ‏ ‏ ‏ ‏ ۲٫۵ از ۳٫۵

-۵/۴ از ۵/۴ ‏ ‏ ‏ ‏ -۹ از -۹ ‏ ‏ ‏ ‏ -۱۷ از -۱۴

۲٫۵ از ۰ ‏ ‏ ‏ ‏ -۳٫۲۵ از ۰ ‏ ‏ ‏ ‏ ۰ از -۱/۳

-۱/۲ از -۱/۴ ‏ ‏ ‏ ‏ -۱٫۲۵ از ۲٫۷۵ ‏ ‏ ‏ ‏ ۱۱/۵ از -۲/۵

۳۰ - چون مطابق قاعده های جمع و تفریق و از روی خط زینه دار ۱۸ عمل کنیم خواهیم داشت :

$$۵+(+۲) = +۷ = ۵+۲$$

$$۲+(-۵) = -۳ = ۲-۵$$

$$۵-(+۲) = ۵+(-۲) = ۳ = ۵-۲$$

$$-۷-(-۱) = -۷+(+۱) = -۶ = -۷+۱$$

$$۰+(+۵) = +۵$$

$$۰+(-۲) = -۲$$

$$۰-(-۳) = ۰+(+۳) = +۳$$

ازین چند مثال قاعدهٔ زیر را نتیجه میگیریم :

۳۱- قاعده - دو نشانهٔ پی در پی را اگر یکی باشد میتوان حذف نموده بجای آنها یک نشانهٔ + گذاشت و اگر دو نشانهٔ پی در پی یکی نباشند میتوان بجای آنها یک نشانهٔ - قرارداد

یعنی بطور کلی

$$+(+a) = +a$$

$$+(-a) = -a$$

$$-(+a) = -a$$

$$-(-a) = +a$$

پرسش های سادهٔ شفاهی

۱- در هر یک از تساویهای پایین بجای ? عددی بگذارید تا تساوی برقرار باشد

$-(+۲)-(-۴) = ?$

$-(+۷)-(+۵) = ?$

$-(-۲)+(-۴) = ?$

$-(-۲)-(-۴) = ?$

$-۵ + ? = ۰$

$-(-۴)+(-۶) = ?$

$-۲ + ? = ۰$

$۹ - ? = ۴$

$-۶ - ? = -۶$

$-۹ + ? = -۹$

$-۴ - ? = ۰$

$۱۳ + ? = -۱۲$

۳۲- هرگاه بخواهیم چند عدد جبری را با یکدیگر جمع کنیم موافق قاعدهٔ بالا (۳۱) می‌بینیم کافیست آنعددها را با علامتهای خود دنبال هم بنویسیم مثلاً اینمجموع را

$$-۲ + (+۵) + (+۱) + (-۳)$$

میتوان چنین نوشت

$$-۲ + ۵ + ۱ - ۳$$

یعنی نشانه های جمع را نمی‌نویسیم و فایدهٔ این کار اختصار در نوشتن است پس باید در نظر داشت هرگاه چند عدد جبری دنبال یکدیگر نوشته شده باشند مقصود اینست که باید آنعددها را باهم جمع نمود.

مثال ۱- $+۶+(-۱)+(-۴) = +۶-۱-۴ = +۱$

مثال ۲- $۳-(-۴)+(-۸) = ۳+(+۴)+(-۸)$

$$= ۳ + ۴ - ۸ = -۱$$

در مثال دوم قبلاً عمل تفریق (۴-) را مبدل بجمع نمودیم و پس از آن موافق قاعدهٔ بالا
عددها را دنبال هم نوشتیم

پرسش های شفاهی

نشانه های جمع و تفریق بین عددهای جبری زیر را حذف نموده آنها را بصورت ساده بنویسید و حاصل
هر یک را بدست آورید

+ (-۷)-(-۳)   +(-۲)+(-۵)

-(-۵)-(-۱)   -(-۴)+(-۳)

+(-۳)-(-۳)+(-۱)   -۲+(-۳)-(-۴)

-۴+(-۱)-(+۲)-(-۳)-(-۴)

-(-۲)+(-۳)-(-۵)-(+۱۱)

۲-(-۱)+(-۲)-(+۱)-(+۲)

۲۳- چند جملهٔ عددی - چند جملهٔ عددی عبارتست از چند عدد جبری که بین آنها فقط
نشانهٔ جمع (+) و تفریق (-) یا یکی از آنها باشد.

و چنانکه دیدیم هر چند جمله را میتوان بمجموع چند عدد جبری تبدیل نمود.

مثلاً (۳-)-(۱+)+(۵+)-۲- چند جمله ایست عددی و میتوان آنرا چنین نوشت

-۲-۵+۱+۳

عددهای ۲- و ۵- و ۱+ و ۳+ را که باید بایکدیگر جمع نمود جمله های این

چند جمله نامیم.

وهمچنین $a - b + c - d$ چند جمله ایست که جمله های آن a و $b-$ و $c+$ و $d-$ میباشد

۲۴- میخواهیم دو چند جمله ۱+۵-۲- و ۶-۷+۳ را باهم جمع کنیم حاصل جمع را میتوان چنین نوشت

$$(-۲ - ۵ + ۱) + (۳ + ۷ - ۶)$$

چون چند جمله اول مساوی ۶- و دومی مساوی ۴+ است پس مجموع آن دو مساوی ۴+۶- یعنی ۲- است.

حال اگر جمله های این چند جمله را باهم جمع کنیم یعنی دو چند جمله را دنبال هم بنویسیم این چند جمله

$$-۲ - ۵ + ۱ + ۳ + ۷ - ۶$$

بدست می آید که چون جمله های آنرا باهم جمع کنیم همان مجموع دو چند جمله بالا یعنی ۲- حاصل میشود ازین مثال نتیجه میگیریم که:

برای جمع کردن چند جمله ها جمله های آنها را دنبال هم نوشته آنها را باهم جمع میکنیم (این قاعده عکس قسمت ب از بند ۲۴ است)

مثال -

$$(-۵ + ۷ - ۹) + (-۶ + ۳) = -۵ + ۷ - ۹ - ۶ + ۳ = -۱۰$$

(و) $(a-b)+(b-y-a)=a-b+b-y-a=-y$

۳۵- **تعریف** - هرگاه دو چند جمله S و S' دارای یک عده جمله بوا قرینه هم باشند این دو چند جمله را قرینه یکدیگر گویند مانند

$$S=-۲+۳-۷ \quad \text{و} \quad S'=۲-۳+۷$$

واضح است که مجموع دو چند جمله قرینه صفر است

۳۶- میخواهیم چند جمله ۴-۳+۲- را از چند جمله ۷+۵- تفریق کنیم

میتوان چنین نوشت $(-۵+۷)-(-۲+۳-۴)$

چون حاصل کاهش یاب ۲+ وحاصل کاسته ۳- است پس تفاضل آندو مساوی ۲-(۳-)

و یا ۳+۲ و یا ۵ میشود

حال اگر قرینه چند جمله کاسته را بر چند جمله کاهش یاب بیفزائیم همان تفاضل بالا بدست

ازانقرار:

$$(-۵+۷)+(+۲-۳+۴)=+۲+۳=+۵$$

ازین مثال نتیجه میگیریم که:

برای تعیین تفاضل دو چند جمله میتوان چند جمله کاهش یاب را بر قرینه چند جمله کاسته افزود

مثال-

$$(-۳+۵-۷)-(-۲+۱۱-۱)=-۳+۵-۷+۲-۱۱+۱=-۱۳$$

$$(a-b)-(-b+y+a)=a-b+b-y-a=y$$

۳۷- برداشتن و گذاشتن پرانتزها - از مطلب های بالا معلوم میشود که:

اولاً میتوان پرانتزی را که در جلوی آن نشانهٔ + است حذف نمود

در این صورت نباید نشانهٔ جمله های آن تغییر کند.

و اگر جلوی پرانتز نشانهٔ - باشد برای برداشتن پرانتز باید نشانهٔ جمله های داخل را تغییر داد

$$(a+2-b-7)=a+2-b-7$$

$$-(a+2-b-7)=-a-2+b+7$$

ثانیاً بالعکس - همواره میتوان یکچند جمله را درون پرانتزی که دارای نشانهٔ + است نوشت

و نیز میتوان نشانهٔ جمله های یکچند جمله را تغییر داده آنرا درون پرانتزی که دارای نشانهٔ - است بنویسیم مثلاً

$$3-2+5-11+7=$$

$$=(3-2+5)+(-11+7)=-(-3+2-5)-(11-7)$$

$$a-b+x-y=$$

$$=(a+x)-(b+y)=-(b-x)-(y-a)$$

پرسش های ساده.

۱- مجموع و تفاضل چند جمله های $a+b$ و $a-b$ را حساب کنید

وقتیکه:

$\begin{cases} a = 15 \\ b = 17 \end{cases}$ $\begin{cases} a = -1 \\ b = 11 \end{cases}$ $\begin{cases} a = -5 \\ b = -6 \end{cases}$

$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} a = +7 \\ b = -3 \end{cases}$ $\begin{cases} a = -10 \\ b = -1 \end{cases}$

۲- چند جمله‌های زیر را مجموع و همچنین تفاضل دو پرانتز تشکیل کنید

$-a + b - c + d$ $-15 + 7 - 5 + 11$

$-2 + a - 3 + x - b$ $x - y - 2 + a + 12$

$-20 - a + y - m$ $-15 + z - x + 7$

تمرین

۱- حاصل هریک از عبارتهای زیر را بدست آورید

$(+18) + (-9) + (-11) - (-15) - (+7)$

$-(-20) - (+5) + (-7) - (-12) + (-15)$

$(-4) - [(+3) - (-2) + (-11) - (+7)]$

۲- بفرض $A = -3 + 7 - 2 + 1$ و $A' = -15 + 30 + 12 - 41$

و $A'' = -3 + 12 - 27 + 11$ حساب کنید چند جمله‌ای $A + A' + A''$

و $A - A' + A''$ ، $A - (A' + A'')$ ، $-A + A' - A''$ را

۳- چند جمله‌ای $a - b + c$ و $a - (b + c)$ را درین حالات احساب کنید:

a	b	c
$a = +۴۵$	$b = +۷$	$c = +۱۲$
$a = -۴۵$	$b = -۷$	$c = -۱۲$
$a = +۴۵$	$b = +۷$	$c = -۱۲$
$a = +۴۵$	$b = -۷$	$c = +۱۲$
$a = -۴۵$	$b = -۷$	$c = +۱۲$

۴- حاصل هریک از عبارتهای زیر را حساب کنید:

(۴ − ۷ + ۳) + (۱۸ − ۵ − ۲۱)

(−۱۰ + ۱۵ − ۲۹) − (−۲۵ + ۱۱ − ۱۵)

(−۴ + ۷ − ۱۲) − (۳ + ۵ − ۶ − ۲) − (۱۲ − ۱۱ + ۵)

(۱۵ − ۲ + ۷) − (۲ − ۲ + ۷) − ۱۲

۵- ارشمیدس ۲۱۲ سال پیش از میلاد مرد و قیصر ۴۴ سال پیش از میلاد کشته شد و گالیله در ۱۶۴۲ پس از میلاد دلیلهای گردش زمین را انتشار داد و جلوس اعلیحضرت پهلوی در ۱۳۰۴ پس از هجرت است و اولین سنگ بنای دانشگاه تهران در سال ۱۳۱۳ پس از هجرت گذارده شد - اول هر کدام از این تاریخ ها را بعددهای جبری بنمایید دوم تاریخ های میلادی را بهجری و یا بالعکس تبدیل کنید سوم فاصله زمان این تاریخها را دو بدو بدست بیاورید.

۶- وقتیکه تهران ظهر است در پاریس ۳ ساعت و ۱۷ دقیقه بظهر مانده است معلوم کنید ۲ ساعت بعد از

ظهر پاریس مطابق چه ساعتی از تهران است و همچنین ساعت ۱۱ بعد از ظهر تهران مطابق چه ساعتی در پاریس است.

۷- شخصی در ماه اول ۵۰ ریال در صندوق پس انداز میگذارد و در ماه دوم ده ریال کمتر و در ماه سوم ده ریال از ماه پیش کمتر پس انداز میکند و این کار را تا مدت ۹ ماه میکند اول مبلغ پس انداز این شخص را در هر ماه معین کنید (و پس انداز منفی را تعبیر کنید) دوم مبلغ کل پس انداز را پس از مدت ۹ ماه بدست آورید.

۸- ارشمیدس حکیم ریاضی دان در سال ۲۸۷ پیش از میلاد متولد شد و در سال ۲۱۲ پیش از میلاد درگذشت حساب کنید چند سال زندگی کرده است

۹- خانهٔ جمشید و خانهٔ خسرو و مدرسهٔ آنها در کوچهٔ راستی واقع است فاصلهٔ خانهٔ جمشید از مدرسه ۵۰۰ قدم و فاصلهٔ خانهٔ خسرو از خانهٔ جمشید ۲۷۰ قدم است تعیین کنید فاصلهٔ خانهٔ خسرو را از مدرسه. این مسئله چند جواب دارد؟

۱۰- در مسئلهٔ بالا بطور کلی اگر فاصلهٔ خانهٔ جمشید از خانهٔ خسرو a قدم باشد و خانهٔ جمشید b قدم از مدرسه فاصله داشته باشد معین کنید فاصلهٔ خانهٔ خسرو را از مدرسه در حالتهای مختلف.

۱۱- دبیرستانی در کوچهٔ راستی واقع است داریوش و ایرج از این مدرسه بکوچه میآیند اولی a متر و دومی b متر راه میرود بفرض اینکه a و b دو عدد جبری باشند اول فاصلهٔ آن دو نفر را حساب کنید دوم مقدارهای جبری a و b تابع چه شرطی باشند تا این دو نفر در یک طرف مدرسه واقع شوند و یا آنکه مدرسه بین آنها باشد سوم اگر مجموع جبری راههائیکه رفته باشند صفر باشد چه نتیجه میگیرید در این حال فاصلهٔ آنها چقدر خواهد بود؟

۱۲- گرماسنجی را در دو آبگون داخل کردیم در اولی ۱۵ درجه و در دومی ۲۷- درجه نشان داده است اختلاف حرارت این دو آبگون چقدر است؟

۱۳- درجه صفر گرماسنجی بغلط معین شده است بقسمی که درجه صفرش مطابق ۲ درجه بالای صفر است اگر این گرماسنج درجه های ۲۵+ و ۶۲+ و ۵+ و ۳- و ۱۵- رانشان دهد مقدار حقیقی این درجه ها چقدر است؟

۱۴- اگر صفر گرماسنجی مطابق چهار درجه زیر صفر باشد درین گرماسنج مقدار حقیقی ۴ و ۷۵ و ۱۲۰ و ۲- و ۲۰- و ۴۳- را معلوم کنید

۱۵- دو مدرسه که در بازی فوتبال مدرسه ها شرکت کرده بودند پس از تمام شدن مسابقه ها اولی ۶ دفعه برده بود و ۵ دفعه هیچ برهیچ شده و ۳ دفعه باخته است دومی ۷ دفعه برده و ۳ دفعه هیچ برهیچ شده و ۵ دفعه باخته است اگر هر دفعه بردی یک نمره داده شود و برای هر دفعه باخت یک نمره کم شود نتیجه مسابقه های هریک ازدو مدرسه را معین کنید .

۱۶- پدری در موقع تولد پسر بزرگش ۳۱ سال دارد و در موقع تولد دخترش ۳۷ سال از سنش گذشته است معین کنید سن دختر را وقتیکه سن پسرش سی سال میشود .

۱۷- ساعت جمشید ۱۰ دقیقه جلوتر از ساعت دبیرستان است و ساعت دبیرستان ۵ دقیقه از ساعت شهرداری عقب است اگر ساعت شهرداری ظهر را نشان دهد ساعت جمشید و ساعت دبیرستان هریک چه وقتی را معین میکنند؟

۱۸- در شهری سه ساعت است شخصی در ضمن گردش می بیند که هر سه ساعت یکموقع را نشان میدهند درصورتیکه از ساعت اول تا ساعت دوم ۱۵ دقیقه در راه بوده و از ساعت دوم تا ساعت سوم ۱۱ دقیقه راه پیموده است و ساعت خود او ۱۸ دقیقه از ساعت سومی عقب است اگر ساعت دوم صحیح باشد هریک ازین ساعتها را

چه تغییری باید داد؟

۱۹- شخصی به پیشواز یکی از دوستان ۱۳ دقیقه پیش از رسیدن ترن وارد ایستگاه راه آهن شد او خبر دادند که ترن ۲۷ دقیقه دیرتر از موقع مقرر خواهد رسید اگر ترن میتوانست ۱۲ دقیقه زودتر برسد چند دقیقه باید منتظر شود؟

۲۰- ترنی از ایستگاه با ۲۰ نفر مسافر درجهٔ اول و ۸۵ مسافر درجهٔ دوم و ۱۱۵ مسافر درجهٔ سوم حرکت میکند در اولین ایستگاه از درجهٔ اول ۵ نفر و از درجهٔ دوم ۲۷ نفر و از درجهٔ سوم ۴۰ نفر خارج میشوند و در عوض ۸ مسافر درجهٔ اول و ۱۵ مسافر درجهٔ دوم و ۴۴ مسافر درجهٔ سوم سوار میشوند در ایستگاه دوم ازین سه درجه بترتیب ۱۹ و ۳۸ و ۵۹ نفر پائین میآیند و ۴ نفر درجهٔ اول و ۱۵ نفر درجهٔ دوم و ۲۹ نفر درجهٔ سوم سوار میشوند و در ایستگاه سوم همه خارج میشوند معین کنید در ایستگاه سوم از هر درجه چند نفر خارج شده است؟

۲۱- نخستین دانشمندی که کتاب جبر و مقابله نوشته محمد پسر موسی خوارزمی است که ایرانی و بسال ۲۲۲ هجری قمری فوت کرده است و نخستین اروپائی که جبر را بصورت کنونی درآورده دکارت Descartes فرانسوی است که در ۱۵۹۶ بدنیا آمد معلوم کنید اولاً چند سال پیش از عالم اروپائی یکنفر ایرانی جبر و مقابله را نوشته ثانیاً چند سال پیش خوارزمی میزیسته؟

د- ضرب عددهای جبری

۳۸- در حساب مقصود از ضرب عدد a در b جمع عددهائی است که هر یک مساوی a و شمارهٔ آن عددها باندازهٔ شمارهٔ یکه های b باشد.

مانند ۴ × ۲ یعنی ۴ + ۴ یا ۸

ما این تعریف را در ضرب عددهای جبری عمومیت میدهیم ازین قرار:

در جبر مقصود از ضرب عدد **مثبت** در عدد جبری a جمع عددهائیست که هریک مساوی a بوده و شمارهٔ آنها باندازهٔ شمارهٔ یکه های قدر مطلق آن عدد مثبت باشد

و مقصود از ضرب عدد **منفی** در عدد جبری a تفریق کردن عددهائیست که هریک مساوی a بوده و شمارهٔ آنها باندازهٔ شمارهٔ یکه های قدر مطلق آن عدد منفی باشد

مثال ۱ـ مقصود از (+۴)·(+۲) جمع عدد +۴ است دو مرتبه.

بنابراین

(+۴)·(+۲) = (+۴) + (+۴) = +۸ = +(۴ × ۲)

مثال ۲ـ مقصود از (−۴)·(+۲) جمع عدد −۴ است دو مرتبه.

بنابراین

(−۴)·(+۲) = (−۴) + (−۴) = −۸ = −(۴ × ۲)

مثال ۳ـ مقصود از (+۴)·(−۲) تفریق عدد +۴ است دو مرتبه.

بنابراین (+۴)·(−۲) = −(+۴) − (+۴) = −۸ = −(۴ × ۲)

مثال ۴ـ مقصود از (−۴)·(−۲) تفریق −۴ است دو مرتبه.

بنابراین

(−۴)·(−۲) = −(−۴) − (−۴) = +۸ = +(۴ × ۲)

ازین چند مثال این قاعدهٔ کلی برای ضرب دو عدد جبری بدست میآید :

۳۹- قاعده - حاصل ضرب دو عدد جبری عددیست جبری که قدر مطلقش مساوی حاصل ضرب قدر مطلق‌های آن دو عدد میباشد و نشانه‌اش + است وقتی که آن دو عدد هم نشانه باشند وگرنه − است .

از روی قاعدهٔ بالا نشانهٔ حاصل ضرب بطور خلاصه چنین است :

+ در + = +

− در + = −

+ در − = −

− در − = +

هریک از دو عددی را که درهم ضرب میشوند سازه مینامند

۴۰- نتیجه - از فقرهٔ ۳۸ معلوم میشود که حاصل جمع n سازهٔ مساوی برابر حاصل ضرب عدد n است در آن سازه

$$(-x) + (-x) + (-x) = (-x) \cdot ۳$$

مثال در تحقیق درستی قاعدهٔ بالا - اتومبیلی بر جادهٔ راست $x'x$ در هر ساعت ۳۰ کیلومتر را می پیماید و ظهر بنقطهٔ o میرسد میخواهیم موضع این اتومبیل را روی این جاده، دو ساعت پیش از ظهر یا دو ساعت بعد از ظهر معین کنیم یعنی بوسیلهٔ عددی جبری

هم فاصله اتومبیل را از O بدست بیاوریم و هم معین کنیم در کدام طرف O واقع است

$$x \quad A \quad O \quad B \quad x$$

معلوم است فاصله اتومبیل از O ۶۰ کیلومتر است باید معلوم کنیم در کدام سمت O واقع است

قبلاً قرارداد میکنیم که راههای پیموده شده بسوی راست مثبت و راههای پیموده شده بسوی چپ منفی باشد و همچنین زمانهای پیش از ظهر را منفی و زمان بعد از ظهر را مثبت اختیار میکنیم و هر ۳۰ کیلومتر را روی خط xx بیک سانتی متر نشان میدهیم دو حالت درنظر میگیریم:

حالت اول اتومبیل بسوی راست میرود - بنابرین راهیکه در یکساعت می پیماید عددیست مثبت مساوی ۳۰+ و چون ظهر به O میرسد پس دو ساعت پیش از ظهر بوضع A و طرف چپ O بفاصله ۳۰×۲ رسیده است حال اگر اندازه جبری OA را به $\overline{OA}$ نمایش دهیم نتیجه میشود $\overline{OA} = -۶۰$ کیلومتر

و چون ظهر به O رسیده پس در دو ساعت بعد از ظهر به نقطه B که بفاصله ۶۰ کیلومتر از O و در طرف راست آنست میرسد یعنی $\overline{OB} = +۶۰$ کیلومتر

اگر بطور کلی برای بدست آوردن راهیکه متحرک پیموده دستور $e = vt$ (نمره ۹ قسمت ب) را بکار بریم و در آن v و t و e را عددهای جبری بگیریم نتیجه بالا را بدست میآوریم از اینقرار:

در دو ساعت پیش از ظهر خواهیم داشت

$$e = \overline{OA} = (+۳۰) \cdot (-۲) = -۶۰ \text{ کیلومتر}$$

و در دو ساعت بعد از ظهر

$e = \overline{OB} = (+۳۰) \cdot (+۲) = +۶۰$ کیلومتر

حالت دوم اتوموبیل بسوی چپ میرود - بنابرین راهیکه در یکساعت می پیماید حد ولیست منفی مساوی ۳۰- پس در دو ساعت پیش از ظهر بوضع B در طرف راست O و بفاصله ۶۰ کیلومتر واقع است یعنی

$\overline{OB} = +۶۰$ کیلومتر

و در دو ساعت بعد از ظهر به A که در سمت چپ O و بفاصله ۶۰ کیلومتر است رسید و یعنی

$\overline{OA} = -۶۰$ کیلومتر

از روی دستور هم همین نتیجه گرفته میشود:

و در دو ساعت پیش از ظهر

$e = \overline{OB} = (-۳۰) \cdot (-۲) = +۶۰$ کیلومتر

و در دو ساعت بعد از ظهر

$e = \overline{OA} = (-۳۰) \cdot (+۲) = -۶۰$ کیلومتر

پرسش های ساده

حاصل ضربهای زیر را حساب کنید

+۵ در +۷ ؛ +۶ در -۴ ؛ +۹ در -۱۱

-۵ در -۲ ؛ -۵ در ۱٫۶ ؛ -۹ در ۰

$-x$ در ۱۱ ؛ $-\alpha$ در -۵ ؛ ۰ در -۲

-۱ در ۸   -۱ ، در -۸   ۱ در ۱۲

۱ ، -۱۱   -۱ ، ۰   -۱٫۵ ، ۰   -۱ ، +۱٫۵

۱۴۱- تحقیق کنید که این تساویها برقرار است.

(+۳)(+۵) = (+۵)(+۳)

(+۴)(-۷) = (-۷)(+۴)

(-۲)(+۶) = (+۶)(-۲)

(-۸)(-۴) = (-۴)(-۸)

از اینجا معلوم میشود:

حاصل ضرب دو عدد جبری بستگی بجای آن دو عدد ندارد.

یعنی بطور کلی $ab = ba$

۱۴۲- از اینکه قدر مطلق حاصل ضرب مساوی حاصل ضرب قدر مطلقهای سازه های ضرب است

نتیجه می شود که:

حاصل ضرب هر عدد در صفر مساوی صفر است

یعنی $0 \times a = a \times 0 = 0$

و بعکس هرگاه حاصلضرب صفر باشد حتماً یکی از سازه های آن صفر است.

بنابرین: **شرط لازم و کافی برای اینکه حاصلضربی صفر باشد اینست که دست کم یکی از سازه های آن صفر باشد**

وهمچنین از ضرب هر عدد در ۱- قرینه آن عدد بدست میآید وبعکس هر عدد مساوی حاصل ضرب ۱- در قرینه آن عدد است .

یعنی $-1 \times x = x \times (-1) = -x$

۴۳- تحقیق کنید این تساویها برقرار است .

$$(+3)\cdot(+5) = -[(-3)(+5)] = -[(+3)(-5)]$$

$$(-4)(+7) = -[(+4)(+7)] = -[(-4)(-7)]$$

$$(-2)(-9) = -[(+2)(-9)] = -[(-2)(+9)]$$

$$(-6)(+11) = (+6)(-11)$$

$$(-5)(-3) = (+5)(+3)$$

از اینجا معلوم میشود که :

اگر نشانه یکی از دو سازه تغییر کند نشانه حاصل ضرب تغییر میکند

یعنی بطور کلی $xy = -[(-x)y] = -[x(-y)]$

بنابراین اگر نشانه هر دو سازه تغییر کند نشانه حاصل ضرب تغییر نمیکند

یعنی $xy = (-x)(-y)$

۴۴- حاصل ضرب چند عدد جبری - حاصل ضرب چند عدد جبری بدین شکل بدست میآید که دو سازه اول و دوم را در هم ضرب نموده حاصل را در سازه سوم ضرب میکنیم و این حاصل ضرب را در سازه چهارم و بهمین ترتیب عمل می کنیم تا حاصل ضرب این چند عدد بدست آید

مثال-

(−۴)(+۲)(−۵) = (−۸)(−۵) = +۴۰

(+۳)(−۲)(+۷)(+۵) = (−۶)(+۷)(+۵)

= (−۴۲)(+۵) = −۲۱۰

پرسش های ساده

حاصل ضرب های زیر را بدست آورید

(+۱)(+۳)(+۲) — (−۱)(−۳)(−۲)

(−۲)(+۵)(−۳) — (−۱)(−۳)(−۷)(−۱)

(+۱۱)(−۵)(−۹)(−۲) — (+۱)(−۵)(−۱)(+۲)

(۰)(+۱)(−۳)(+۴)(−۵) — (−۸)(۰)(−۱۱)(+۷)(−۱)

۴۵- در هر یک از مثالهای بالا تحقیق کنید که اگر جای سازه های ضرب را تغییر دهیم حاصل ضرب تغییر نمیکند

۴۶- از مثالهای بالا معلوم میشود که اگر شمارهٔ سازه های منفی جفت یا صفر باشد نشانهٔ حاصل ضرب + است وگرنه نشانه − است.

از دو خاصیت بالا قاعدهٔ زیر برای ضرب چند عدد جبری نتیجه میشود:

قاعده - حاصل ضرب چند عدد جبری عددیست جبری که قدر مطلقش مساوی حاصل ضرب قدر مطلقهای آن چند عدد بوده و نشانه‌اش + است اگر شمارهٔ سازه های منفی جفت و یا صفر باشد وگرنه

-خواهد بود

۴۷-نتیجه-هرگاه یکی از سازه ها صفر باشد حاصل ضرب صفر میشود

۴۸-تحقیق کنید که تساویهای زیر درست است.

$$[(-۲)(+۵)]\cdot(+۳) = [(-۲)(+۳)]\cdot(+۵)$$
$$= [(+۵)(+۳)]\cdot(-۲)$$

$$[(-۱)(-۴)(+۲)](-۷) = [(-۱)(-۷)](-۴)(+۲)$$
$$= [(-۴)(-۷)](-۱)(+۲)$$
$$= [(+۲)(-۷)](-۴)(-۱)$$

ازینجا نتیجه میگیریم که برای ضرب یکعدد در حاصل ضرب چند عدد کافی است آنعدد را در یکی از آن چند عدد ضرب کرده و از روی قاعدهٔ بالا حاصل ضرب را بدست آورد

یعنی $(abc)x = (ax)bc = (bx)ac = (cx)ab$

پرسش های ساده

حاصل ضربهای زیر را حساب کنید

abc وقتی که $a=-۲$ و $b=-۵$ باشد

abc ، $a=+۲$ و $b=-۲$ ، $c=۰$

$۵xy$ ، $x=-۵$ و $y=-۲$

$-3axy$ وقتیکه $a=1$ ، $x=-2$ ، $y=-3$

» » $a=-1$ ، $x=+2$ ، $y=+3$

» » $a=+1$ ، $x=+2$ ، $y=+3$

» » $a=-2$ ، $x=0$ ، $y=0$

۴۹- اول معنای این تساویها را بیان کنید

$$5(-2+4)=5(-2)+5(+4)$$

$$-3(-1+2-4)=(-3)(-1)+(-3)(+2)+(-3)(-4)$$

$$(-5-2+7)(-9)=(-5)(-9)+(-2)(-9)+(+7)(-9)$$

دوم تحقیق کنید که تساویهای بالا درست است

از مثالهای بالا چنین برمیآید :

برای تعیین حاصل ضرب یک عدد جبری در مجموع چند عدد میتوان آن عدد جبری را در هر یک از جمله های مجموع ضرب نموده حاصل ضربهای جزء را باهم جمع جبری نمود .

یعنی $(a-b+c)m=am-bm+cm$

۵۰- میخواهیم مجموع جبری (۴-۳-) را در مجموع جبری (۱- ۵ + ۲ -) ضرب کنیم

مستقیماً این حاصل ضرب مساوی حاصل ضرب ۱- در ۲+ است که مساوی ۲- میباشد

نیز میتوان یکی از این دو مجموع (مثلاً مجموع دوم) را یک عدد فرض نموده مطابق نمره ۴۹ ضرب

گرداز قرار:

(-۲ + ۵ - ۱)(۳ - ۴) = (-۲ + ۵ - ۱)(+۳) + (-۲ + ۵ - ۱)(-۴)

طرف دوم را نیز میتوان مطابق نمره ۴۹ بسط داد بنابرین حاصل ضرب چنین میشود

(-۲ + ۵ - ۱)(۳ - ۴) =

(-۲)(+۳) + (+۵)(+۳) + (-۱)(+۳) + (-۲)(-۴) + (+۵)(-۴) + (-۱)(-۴) =

-۶ + ۱۵ + -۳ + ۸ + -۲۰ + ۴ =

= -۲۹ + ۲۷ = -۲

وهمچنین

$(a+b-c)(x-y) = (a+b-c)x + (a+b-c)(-y)$

$= ax + bx - cx - ay - by + cy$

پرسش های ساده

۱- حاصل ضربهای زیر را از دو راه بدست آورید

$-5(a+b)$ وقتیکه $a=-2$ و $b=-1$ باشد

$x(a-b)$ » $x=-1$ و $a=2$ و $b=-2$

$x(a+b-4)$ » » » »

$-12(x-y)(-a)$ » $x=2$ و $y=-1$ و $a=-3$

$(a-b)(a+b)$ $a=2$ و $b=-2$

$(a-b)(a+b)$ وقتیکه $a=2$ ، $b=-2$

« « $a=-2$ ، $b=2$

$5(a+b-1)(x-y)$ « $a=1$ ؛ $b=-1$ ؛ $x=2$ ؛ $y=-1$

« $a=0$ ؛ $b=0$ ؛ $x=0$ ؛ $y=1$

۲- دو مسافر از شهری با تندیهای ۸٫۵ کیلومتر در ساعت و ۱۰٫۲۵ کیلومتر در ساعت حرکت میکنند میخواهیم فاصله آنها را پس از مدت ۲ ساعت و ۵۲ دقیقه حساب کنیم در صورتیکه اولاً بیکجهت ثانیاً در دو جهت مختلف حرکت کنند

۵- تقسیم دو عدد جبری

۵۱- غرض از تقسیم عدد جبری a (مقسوم) بر عدد جبری b (مقسوم علیه) پیدا کردن عددیست جبری باشد q (خارج قسمت) بطوریکه حاصل ضرب b و q مساوی a شود و آنرا چنین نویسیم

$$\frac{a}{b} = a : b = q$$

بنا بتعریف بالا معلوم میشود که $a = bq$

مثال

$\frac{+8}{+4} = +2$ زیرا $+8 = (+2)(+4)$

$\frac{+10}{-2} = -5$ « $+10 = (-2)(-5)$

$\frac{-12}{+4} = -3$ « $-12 = (+4)(-3)$

$+4 = \frac{-24}{-6}$ زیرا $(+4)(-6) = -24$

پرسش های ساده

خارج قسمت های زیر را حساب کنید

۹ بر ۳ ؛ ۹ بر ۳- ؛ ۹- بر ، ۳

-15 ، -5 ؛ $+15$ ، -5 ؛ -15 ، $+5$

$+36$ ، -9 ؛ -36 ، -9 ؛ -36 ، $+9$

$-a$ ، b ؛ $-a$ ، $-b$ ؛ a ، $-b$

x ، -1 ؛ 1 ، $-x$ ، -1 ، $-1,5$

۵۲ـ از مثالهای بالا معلوم میشود:

اولاً قدر مطلق خارج قسمت مساوی خارج قسمت قدر مطلق مقسوم بر قدر مطلق مقسوم علیه است

ثانیاً نشانه خارج قسمت + است وقتی که مقسوم و مقسوم علیه هم نشانه (هر دو مثبت یا هر دو منفی) باشند و - است وقتی که دارای دو نشانه مختلف (یکی مثبت و دیگری منفی) باشند

و نیز میتوان از روی تساوی $a = bq$ همین نتیجه را گرفت:

اگر a و b دارای یک نشانه باشند نشانه q باید + باشد تا نشانه حاصل ضرب یعنی bq همان نشانه a شود و اگر نشانه a و b یکی نباشد بهمین دلیل باید q منفی باشد

بنابرین برای تقسیم دو عدد جبری این قاعده را خواهیم داشت:

قاعده - خارج قسمت عدد جبری a بر عدد جبری b عددیست

جبری مانند q بقسمی که قدر مطلقش مساوی خارج قسمت قدر مطلق مقسوم a بر قدر مطلق مقسوم علیه b باشد و نشانه اش + است اگر مقسوم و مقسوم علیه هم نشانه باشند و گرنه - است.

برای یافتن نشانهٔ خارج قسمت از روی قاعدهٔ بالا بطور خلاصه میتوان نوشت:

+ تقسیم بر + = +

+ بر - = -

- بر + = -

- بر - = +

۵۳ - حالتهای مخصوص - نخست - اگر مقسوم علیه مساوی ۱+ شد خارج قسمت مساوی مقسوم میشود بعبارت دیگر خارج قسمت هر عدد بر یک مساوی خود آن عدد است

یعنی $a : +1 = \frac{a}{+1} = a$.

دوم - اگر مقسوم مساوی صفر و مقسوم علیه مخالف صفر باشد خارج قسمت صفر میشود

زیرا از تساوی $bq = a$ معلوم میشود که هرگاه $a = 0$ و $b \neq 0$ باشد طرف اول صفر است ناچار طرف دوم نیز مساوی صفر بوده و از آنجا q باید صفر باشد

سوم - اگر مقسوم علیه صفر و مقسوم مخالف صفر باشد تقسیم محال است

زیرا خارج قسمت را هر عددی فرض کنیم چون حاصل ضربش در صفر مساوی صفر میشود بنابراین نمیتواند مساوی مقسوم که صفر نیست باشد.

تبصره - از تساویهای $2=\frac{2}{1}$ و $20=\frac{2}{0.1}$ و $200=\frac{2}{0.01}$ و .... معلوم می شود که هر چه قدر مطلق مقسوم علیه کوچک شود قدر مطلق خارج قسمت بزرگ میشود و چون قدر مطلق صفر از قدر مطلق تمام عددها کوچکتر است بنابراین قدر مطلق خارج قسمت هر عدد بر صفر از قدر مطلق تمام عددها بزرگتر میشود و چون چنین عددی را نمیتوان معین کرد آنرا بعلامت ∞ نمایش داده اند و آنرا بی نهایت گویند.

۵۴ - عکس یک عدد - عکس یک عدد مساوی خارج قسمت ۱+ است بر آن عدد

چنانکه عکس عدد ۴ - عدد $\frac{1}{4}$ - است و بطور کلی $\frac{1}{a}$ عکس عدد a میباشد

از روی این تعریف معلوم میشود که:

حاصل ضرب هر عدد در عکس خود مساوی ۱+ است

۵۵ - درستی تساویهای زیر را تحقیق کنید

$$\frac{-20\times4}{5}=\frac{-20}{5}\times4 \quad \text{و} \quad \frac{-24\times3}{8}=\frac{-24}{8}\times3$$

$$\frac{-36:(-3)}{-4}=\frac{-36}{-4}:(-3) \quad \text{و} \quad \frac{+18:(-2)}{-3}=\frac{+18}{-3}:(-2)$$

$$\frac{-40}{4\times(-5)}=\frac{-40}{4}:(-5) \quad \text{و} \quad \frac{48}{(-6)\times2}=\frac{48}{-6}:2$$

$$\frac{-36}{-12:3}=\frac{-36}{-12}\times3 \quad \text{و} \quad \frac{-27}{(-9):(-3)}=\frac{-27}{-9}\times(-3)$$

$$\frac{-12\times(-3)}{-6\times(-3)}=\frac{-12}{-6} \quad \text{و} \quad \frac{+30:2}{-54:2}=\frac{+30}{-54}$$

از این تساویها میتوان خاصیت های زیر را نوشت:

۵۶ـ نخست ـ هرگاه مقسوم در عددی ضرب شود خارج قسمت در آن عدد ضرب میشود

۵۷ ـ دوّم ـ هرگاه مقسوم بر عددی تقسیم شود خارج قسمت بر آن عدد تقسیم میشود

۵۸ ـ سوم ـ هرگاه مقسوم علیه در عددی ضرب شود خارج قسمت بر آن عدد تقسیم میشود

۵۹ ـ چهارم ـ هرگاه مقسوم علیه بر عددی تقسیم شود خارج قسمت در آن عدد ضرب میشود

۶۰ ـ پنجم ـ هرگاه مقسوم و مقسوم علیه در عددی ضرب یا بر عددی تقسیم شوند خارج قسمت تغییر نمیکند .

۶۱ـ معنای این تساویها را بگوئید و تحقیق کنید که هریک درست است :

$$(8+12-20):(-4) = \frac{-8}{-4} + \frac{+12}{-4} + \frac{-20}{-4}$$

$$(9-18-12):(+3) = \frac{+9}{+3} + \frac{-18}{+3} + \frac{-12}{+3}$$

از این تساویها معلوم میشود که :

در تقسیم مجموع جبری چند عدد بر یک عدد میتوان هر یک از جمله های آن مجموع را بر آن عدد تقسیم نمود و خارج قسمت های جزء را جمع کرد

بطور کلی میتوان نوشت :

$$(a+b+c) : m = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}$$

زیرا از ضرب این خارج قسمت در m مقسوم بدست میآید :

$$\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}\right) \times m = \frac{a}{m} \times m + \frac{b}{m} \times m + \frac{c}{m} \times m$$

$$= a + b + c$$

($\frac{a}{m} \times m$ مساوی a است زیرا $\frac{a}{m}$ خارج قسمت تقسیم a بر m است همینطور

$\frac{b}{m} \times m = b$ و .....)

۶۲ـ تحقیق کنید که تساویهای زیر درست است :

$$(-۳ \times ۲ \times -۱۲) : (-۴) = (-۳ \times ۲) \times \frac{-۱۲}{-۴} = -۳ \times ۲ \times ۳$$

$$(-۴ \times -۲۰ \times -۷) : (+۵) = (-۴ \times -۷) \times \frac{-۲۰}{+۵} = -۴ \times -۷ \times -۴$$

یعنی : برای تعیین خارج قسمت حاصل ضرب چند عدد جبری بر یک عدد جبری a میتوان یکی از آن عددها را بر a تقسیم نمود و خارج قسمت را در حاصل ضرب سایر عددها ضرب نمود

$$\frac{bcd}{a} = \frac{b}{a} \times cd = \frac{c}{a} \times bd = \frac{d}{a} \times bc$$

یادآوری ـ $\frac{-۸ \times ۱۲ \times ۲۰}{-۴}$ را نمیتوان چنین نوشت :

$$\frac{-۸}{-۴} \times \frac{۱۲}{-۴} \times \frac{۲۰}{-۴}$$

زیرا موافق قاعدهٔ بالا باید یکی از سازه‌ها بر ۴ـ تقسیم شود نه همهٔ آنها

و ـ نامساویهای عددی

۶۳ — وقتی گویند عدد جبری a بزرگتر از عدد جبری b است ($a > b$) که $a - b$ مثبت باشد و در غیر اینحالت $a < b$ میباشد.

مثلاً چون تفاضل $(+5) - (-2) = +7$ مثبت است بنابرین $-2 < +5$

و $(-7) - (-3) = -4$ منفی است بنابرین $-7 < -3$

ازین تعریف نتیجه های زیر بدست میآید:

۶۴ — نخست — هر عدد مثبت از صفر بزرگتر است و هر عدد منفی از صفر کوچکتر است

دوّم — هر عدد مثبت بزرگتر از هر عدد منفی است

سوّم — از دو عدد منفی آنکه قدر مطلقش بزرگتر است کوچکتر میباشد

زیرا هرگاه دو عدد a و b منفی باشند و بفرض اینکه $|b| > |a|$ باشد لازم میآید که $b - a$ منفی باشد بنابرین $a > b$ خواهد بود

نتیجه — رشتهٔ اعداد صحیح جبری بترتیب کوچکی و بزرگی چنین است

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

چهارم — میتوان بر دو طرف یک نامساوی مقداری افزود یا از دو طرف مقداری کاست بدون اینکه جهت نامساوی تغییر کند یعنی

طرفی که بزرگتر بود و بزرگتر میماند

بفرض $a > b$ میتوان بدو طرف مقدار جبری c را افزود درینصورت خواهیم داشت

$b+c < a+c$ زیرا تفاضل $b-a$ ثابت میماند

پنجم - میتوان دو طرف نامساوی را در عدد مثبت ضرب نمود بدون اینکه جهت نامساوی تغییر کند

$5 < 7$ - از ضرب دو طرف در ۳ نتیجه میشود $15 < 21$ - زیرا تفاضل منفی است

ششم - چون دو طرف نامساوی در عدد منفی ضرب شود جهت نامساوی تغییر میکند (یعنی اگر طرف اول بزرگتر است کوچکتر از طرف دوم میشود و اگر کوچکتر است بزرگتر میگردد)

$7 > 2$ - از ضرب دو طرف در ۳- نتیجه میشود $-21 < -6$

تمرین ها

۱- حاصل ضربهای ab و abc را در حالات ذیل حساب کنید:

$a=+5$; $b=-9$ و $a=-5$; $b=10$ و $a=-8$; $b=4$

$a=-20$; $b=-11$ و $a=5$; $b=-15$; $c=12$ و $a=b=-10$

$c=-8$ و $a=b=c=-7$

۲- $(x+y)(x-y)$ و $(x-y-1)(3x+2y)(2x-y)$ را در هریک از حالات ذیل حساب کنید

$x=2$; $y=-4$ و $x=3$; $y=7$ و $x=5$; $y=-2$

$x=-7$; $y=-8$ و $x=-5$; $y=-5$ و $x=-12$; $y=4$

۳ـ $(a+b)(c+d)$ و $(a-b)(c-d)$ را درین حالتها حساب کنید

$a = 12$	$b = 8$	$c = -20$	$d = 11$
$a = -12$	$b = -11$	$c = -50$	$d = 30$
$a = 11$	$b = 11$	$c = 11$	$d = -11$
$a = 95$	$b = -5$	$c = -14$	$d = -3$
$a = -40$	$b = -8$	$c = -15$	$d = 25$

۴ـ عملهای زیر را انجام دهید و حاصل هر یک را بدست آورید

$(-21+10-15)(-5)-(7-12)(-3)$

$[(-3+11-7)-(-8+11-5)](-6+12)$

$[(-20+10-5)-(-10+4-9)][(28-15)-(12+7-1)]$

۵ـ تحقیق کنید که تساویهای زیر درین حالتهای مخصوص درست است

$4x-2=2x-12$ وقتیکه $x=-5$

$3x-5=2x+7$ « $x=12$

$2x+3y=17+10y$ « $\begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$

$(x-y)(y-2)=2x-$ « $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

۶ - عملهای زیر را انجام دهید و حاصل هریک را بدست آورید

$(-۱۸ + ۳۵ - ۸) : (-۲ + ۷ - ۱۵)$

$-۱۱۷ : (۵ - ۳ + ۹ + ۲۰)$

$(-۲۱)(۴۹)(-۵۶) : (-۷)(-۳)$

$(۵ - ۲)(۷ - ۳) : (۴ - ۷)$

$[-۲ + (+۲)(-۵) + ۱۷ - ۱۲(-۲۵)] : (۱۰ - ۱۲)$

۷ - حاصل $\frac{ab}{c}$ و $\frac{a-b}{c}$ را در حالتهای زیر بدست آورید

$a = -۱۵$ $b = ۵$ $c = ۲$

و $a = ۲۴$ $b = -۸$ $c = -۶۰$

و $a = -۲$ $b = ۱۲$ $c = ۱۸$

و $a = -۴۸$ $b = -۱۵$ $c = -۳۰$

۸ - تحقیق کنید که تساویهای زیر در این حالتها درست است

$\frac{x}{۳} + ۲x = ۶ + ۳x$ وقتیکه $x = -۹$

$\frac{x}{۱۸} - \frac{y}{۷} = ۳$ ، $\begin{cases} x = -۱۸ \\ y = -۲۸ \end{cases}$

۹ - تحقیق کنید که آیا نامساویهای زیر در این حالتهای مخصوص درست است یا نه و نامساویهای نادرست را درست کنید

$2x-2 > (x-2)(x-7)$ وقتی که $x=2$

$2x-5 < \frac{x+3}{x-1}$. $x=5$

$a-b > \frac{a+b}{b} - \frac{a-b}{a}$. $\left.\begin{matrix} a=5 \\ b=-2 \end{matrix}\right\}$

$\frac{a+b}{a-b} > \frac{a-b}{a+b}$. $\left.\begin{matrix} a=3 \\ b=1 \end{matrix}\right\}$

$(a-b)(a+b) < 2ab$. $\left.\begin{matrix} a=2 \\ b=1 \end{matrix}\right\}$

۱۰- اگر $b > a$ باشد ثابت کنید که

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

۱۱- اگر a , b مثبت باشند ثابت کنید که

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqq 2$$

۱۲- ثابت کنید در چند نامساوی مجموع جبری طرفهای کوچکتر کوچکتر است از مجموع جبری طرفهای بزرگتر. (بوسیلهٔ یک مثال عددی درستی این قضیه را نشان دهید)

۱۳- در دو نامساوی چون طرف کوچکتر نامساوی دوم را از طرف بزرگتر نامساوی اول و طرف بزرگتر نامساوی دوم را از طرف کوچکتر نامساوی اول کم کنیم دو باقیمانده تشکیل یک نامساوی میدهد که جهتش موافق نامساوی اول خواهد بود - از روی چند مثال عددی امتحان کنید

۱۴- در چند نامساوی که دارای یک جهت‌اند و دو طرف آنها مثبت است حاصل ضرب طرفهای بزرگتر بزرگتر است از حاصل ضرب طرفهای کوچکتر از روی یک مثال عددی درستی این نکته را تحقیق کنید.

۱۵- نخستین بازیهای قهرمانی المپیک در سال ۷۷۶ پیش از میلاد مسیح شروع شد و تا سال ۳۹۶ پس از میلاد دوام داشت میدانیم که این بازیها هر چهار سال یکبار تشکیل میشود در این مدت چند بار بازی شده است؟- دوباره در سال ۱۸۹۶ پس از میلاد بازیهای قهرمانی المپیک شروع شد بفرض اینکه انقطاعی حادث نشده باشد معلوم کنید المپیک آخری (۱۹۳۷) که در برلن بوده چندمین آنها است.

۱۶- a کیلوگرم گوشت b ریال ارزش دارد قیمت d کیلوگرم آنرا حساب کنید (حالتهای مخصوص $a=5$; $b=16$; $d=7$ همچنین $a=12$; $b=40$; $d=3$)

۱۷- کارگری پس از a روز کار b ریال مزد گرفته است معلوم کنید پس از ۱۵ روز کار چند ریال مزد باید بگیرد؟ (حالتهای مخصوص $a=12$ و $b=120$ همچنین $a=18$; $b=135$)

۱۸- پس انداز فعلی پرویز a ریال بیش از خسرو است اما پرویز هفته‌ای ۳ ریال و خسرو هفته‌ای ۵ ریال پس انداز میکنند معلوم کنید پس از چند هفته دیگر هر دو دارای یک مبلغ پس انداز میشوند (در حالتهای مخصوص $a=120$; $a=80$; $a=54$)

۱۹- اگر نقطهٔ واقع در درون مثلث را به سه رأس وصل کنیم سه مثلث تشکیل میشود که چون مساحت آنها را S_1 و S_2 و S_3 فرض کنیم این دستور حاصل میشود $S = S_1 + S_2 + S_3$ (S مساحت مثلث مفروض است) برای S_1 و S_2 و S_3 اندازه‌های جبری مثبت و منفی در نظر بگیرید بطوریکه این دستور برای وقتی که نقطه بیرون مثلث باشد نیز صدق کند.

۲۰ـ همین مسئله را حل کنید وقتی که شکل چهار ضلعی باشد .

۲۱ ـ فاصلهٔ ایرج و پرویز d قدم است ایرج هر دقیقه a قدم میدود و پرویز دقیقهٔ دو قدم تند تر میدود اگر هر دو یکمرتبه بدوند بطوریکه پرویز برای گرفتن ایرج حرکت کند (یعنی هر دو بیک سو بدوند) معلوم کنید پس از ۳ دقیقه و پس از ۵ دقیقه فاصلهٔ آنها چقدر میشود ـ (فرض میکنیم قدمهای ایرج و پرویز بیک درازا باشد)

۲۲ ـ در مسئلهٔ پیش اگر d = ۲۴ قدم باشد پس از ۱۰.۵ دقیقه فاصلهٔ آنها چقدر میشود . جواب عددی است منفی معنای آن چیست؟

۲۳ ـ در مسئلهٔ پیش وقتیکه فاصله d قدم است معین کنید پس از چند دقیقه پرویز ایرج را میگیرد؟

(حالتهای مخصوص : $d=۱۸$ ؛ $d=۴۸$ ؛ $d=۶۰$)

ز ـ توان

۶۵ـ توان m ام عدد جبری a عبارتست از حاصل ضرب m عدد مساوی a و آنرا چنین نویسند a^m (میخوانند a بتوان m)

$$a^m = \overbrace{a.a.a...a}^{m \text{ درجه}}$$

a را پایه و m را که عدد صحیح و مثبتی است **نما** خوانند چنانکه توان پنجم ۲- چنین است

$$(-۲)^۵ = -۲ \times -۲ \times -۲ \times -۲ \times -۲ = -۳۲$$

و توان سوم ۵+ چنین میشود

$$(+۵)^۳ = +۵ \times +۵ \times +۵ = +۱۲۵$$

و توان چهارم ۳- چنین است

$(-3)^4 = -3 \times -3 \times -3 \times -3 = +81$

توان دوم و سوم یک عدد را بترتیب مربع و مکعب آنعدد نامند چنانکه مربع ۲- عدد ۴+ است
و مکعب ۲- عدد ۸- است

پرسش های ساده

توان های زیر را حساب کنید

$(+5)^2$　$(-2)^4$　$(-2)^3$　2^3

$(-1)^5$　$(-1)^3$　$(-5)^4$　$(-5)^3$

$(+1)^m$　$(+1)^3$　$(-1)^m$　$(-1)^6$

m　2　$(-6)^3$　$(-8)^2$

۶۶- چون توان حالت مخصوصی از ضرب است پس بنا بر قاعده نشانه ها (نمره ۴۶) چنین خواهیم
داشت :

**اگر عددی مثبت باشد توان m ام آن عدد نیز مثبت است
و اگر پایه منفی باشد توان m ام آن مثبت است هرگاه m جفت باشد
و منفی است اگر m تاق باشد**

چنانکه

$(+3)^4 = (-3)^4 = +81$

و

$(-2)^3 = -8$

یادآوری - باید دانست که ma و a^m با یکدیگر تفاوت کلی دارند زیرا اولی عبارت

از حاصل جمع m عدد مساوی با a و دومی عبارت از حاصل ضرب m سازه مساوی با a میباشد.

چنانکه $(-4)\cdot 3 = (-4)+(-4)+(-4) = -12$

و $(-4)^3 = (-4)\cdot(-4)\cdot(-4) = -64$

۶۷- برای جمع و تفریق و ضرب و تقسیم چند توان قاعده کلی اینست که هریک از آنها را حساب کرده و از روی قاعده های پیش عمل میکنیم

چنانکه $(-2)^3 + (+3)^2 = (-8) + (+9) = +1$

و $(-2)^3 - (+3)^2 = (-8) - (+9) = -17$

و $(-2)^3 \times (+3)^2 = (-8) \times (+9) = -72$

و $(-2)^3 : (+3)^2 = (-8) : (+9) = -\frac{8}{9}$

پرسش های ساده

حاصل عملهای زیر را بدست آورید

$(-2)^2-(-4)$ $(-5)^2 + (-3)^3$

$(-1)^3-(-1)^4$ $-3^2 - 2^3$

$(-4)^2(-2)^3$ $(-4)^2 \times (-3)^2$

$(-5)(-1)^3(-3)$ $(-1)^3 \cdot (-2)^2 \cdot (-3)$

$(-5)^3 : (-1)^2$ $(-2)^4 : (-3)^2$

$(-5)^3 : (-2)^3$ $(-3)^3 : (-2)^2$

$(-3)^2 \cdot (-3)^4$ $\qquad$ $(-5)^2 \cdot (-5)$

$(-4)^3 : (-4)^2$ $\qquad$ $(-8)^2 : (-8)$

$4^3 \times (-4)^3$ $\qquad$ $(-2)^2 \cdot (-2)^2$

۸۶ـ حالتهای مخصوص ـ نخست ـ حاصل ضرب چند توان که دارای یک پایه باشند توانیست دارای همان پایه که نمای آن مجموع نماهای آنچند توان باشد

$$a^2 \times a^3 = a \cdot a \times a \cdot a \cdot a = a^{2+3} = a^5$$

چنانکه

$$(-2)^3 (-2)^2 = (-2)^5 = -32$$

$$(-5)^2 (-5)^4 = (-5)^6 = 15625$$

دوم ـ حاصل ضرب چند توان که دارای یک نما باشند توانیست که پایهٔ آن حاصل ضرب پایه ها و نمای آن یکی از نماها باشد

چنانکه

$$(-3)^2 (-4)^2 = (-3)(-3) \times (-4)(-4)$$

$$= [(-3)(-4)]\,[(-3)(-4)]$$

$$= [(-3)(-4)]^2 = 12^2 = 144$$

وبطور کلی

$$x^a y^a z^a = (xyz)^a$$

سوم ـ خارج قسمت دو توان که دارای یک پایه باشند توانیست دارای همان پایه و نمائی مساوی تفاضل نمای مقسوم علیه از نمای مقسوم

مثال ۱-

$$(-3)^4 : (-3)^2 = \frac{(-3)(-3)(-3)(-3)}{(-3)(-3)}$$

چون مقسوم و مقسوم علیه را دو بار بر ۳- تقسیم کنیم خارج قسمت مساوی $\frac{(-3)(-3)}{1}$ و یا

$(-3)^2$ که مساوی $(-3)^{4-2}$ است میشود

و بطور کلی در تقسیم a^m بر a^n اگر $m > n$ باشد خواهیم داشت

$$a^m : a^n = a^{m-n} \qquad (1)$$

مثال ۲-

$$(-4)^3 : (-4)^2 = \frac{(-4)^3}{(-4)^2} = -4$$

از روی دستور (۱) این خارج قسمت مساوی $(-4)^1$ میشود پس $(-4)^1 = -4$

یا بطور کلی $a^1 = a$

یعنی: توان نخست هر عدد خود آنعدد است

مثال ۳-

$$(-3)^2 : (-3)^2 = 1$$

اگر دستور (۱) را درین مثال که نماها مساوی هستند بکار بریم خارج قسمت مساوی (-3) میشود از طرف دیگر اینخارج قسمت مساوی ۱+ است بنابرین برای اینکه دستور (۱) را در حالت $m = n$ نیز عمومیت دهیم قرار داد می کنیم که :

توان صفر هر عدد ۱+ است یعنی $a^0 = +1$

مثال ۴ـ

$$(-5)^2 : (-5)^4 = \frac{(-5)^2}{(-5)^4}$$

که چون مقسوم و مقسوم علیه را دو بار بر ۵ـ تقسیم کنیم خارج قسمت مساوی $\frac{1}{(-5)^2}$

$\frac{1}{(-5)^{4-2}}$ که عکس $(-5)^{4-2}$ است میشود

چون موافق دستور (۱) عمل کنیم خارج قسمت بالا مساوی $(-5)^{2-4}$ ویا $(-5)^{-2}$ میشود

دراینجا بنمای منفی میرسیم ـ برای اینکه دستور (۱) کلی باشد میتوان چنین نوشت

$$(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2}$$

پس قرار براین میگذاریم

توانی که دارای نمای منفی است مساوی عکس توانیست که پایهٔ آن همان پایه ونمای آن قدر مطلق آن نما باشد

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

نتیجه ـ با قرارداد های بالا همیشه میتوان نوشت

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

که در آن m و n دو عدد درست بوده و ممکن است $m > n$ ویا $m < n$ ویا $m = n$ باشد

پرسش های ساده

عمل های زیر را انجام دهید :

$(-3)^2(-3)^{-1}$ $5^2 \cdot 5^4$ $3^2 \cdot 3$

$(-1)^{-1}(-2)^{-1}$ $3^2 \cdot 2^2$ $(-2)^0 \cdot (-2)^1$

$x^p \cdot x^{-p}$ $x^0 y^0$ $5^0 \cdot (-3)^0$

$3^3 : 3^2$ $5^a \cdot 2^a$ $y^{-4} \cdot y^4$

$(-2)^0 : (-5)^0$ $(-7)^1 : (-7)^2$ $4^{-2} : 4^{-3}$

$x^0 : x^2$ $x^2 : x^0$ $a^b : a^{-b}$

$(-x)^2 : x^{-2}$ $2^a : 2^{2a}$ $a^1 : a^0$

۶۹- تبصره- میتوان $\frac{1}{b}$ را b^{-1} نوشت و بنابراین

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}$$

و بدین ترتیب تقسیم دو عدد را بصورت ضرب مینویسیم

۷۰- هرگاه بخواهیم توان m ام a را بتوان p برسانیم کافیست a را بتوان حاصل ضرب mp برسانیم

یعنی

$$(a^m)^p = a^{mp}$$

زیرا مثلاً

$$(x^2)^3 = xx\ xx\ xx = x^6$$

تبصره- بنابراین $(x^a)^b = (x^b)^a$ و $(x^2)^3 = (x^3)^2$

$$\left(\frac{1}{a^2}\right)^3 = (a^{-2})^3 = a^{-6} = \frac{1}{a^6}$$

۷۱- توان m ام خارج قسمت دو عدد جبری مساوی خارج قسمت

توان m ام آن دو عدد است

یعنی
$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

زیرا
$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = (a \cdot b^{-1})^m = a^m \cdot b^{-m}$$
$$= a^m \cdot \frac{1}{b^m} = \frac{a^m}{b^m}$$

چنانکه
$$\left(\frac{-4}{2}\right)^3 = \frac{(-4)^3}{2^3} = -8$$

پرسش های ساده

۱- تقسیمهای زیر را بصورت ضرب بنویسید

$$\frac{2}{3} \qquad \frac{-7}{5} \qquad \frac{2}{-4} \qquad \frac{-a}{-x}$$

$$\frac{-b}{x} \qquad \frac{-2}{-5} \qquad \frac{-x}{-x} \qquad \frac{x^2}{a^2}$$

۲- عملهای زیر را انجام دهید

$$(5^2)^2 \qquad (-2^2)^3 \qquad (-1^a)^5 \qquad (-1^a)^6$$

$$(x^0)^m \qquad \left[(-b)^5\right]^0 \qquad (3^{-2})^2$$

$$\left[(-2)(-3)\right]^2 \qquad \left[(-2)^2 \cdot (-3)\right]^{-1}$$

$$\left(\frac{-2}{-3}\right)^2 \qquad (ab^2)^3 \qquad \left(\frac{3}{-4}\right)^{-2}$$

$$\left(\frac{a}{-b}\right)^{-1} \qquad \left(\frac{-5}{x}\right)^0 \qquad \left(\frac{-5^2}{-2^3}\right)^{-1}$$

ج- ریشهٔ اعداد جبری

۷۲- ریشهٔ n ام عدد جبری a (n عددی است درست بزرگتر از صفر) عددیست

مانند b بقسمی که چون آنرا بتوان n رسانیم عدد a بدست آید و آنرا بدین شکل نویسند $b=\sqrt[n]{a}$

بنابتعریف $b^n=(\sqrt[n]{a})^n=a$

نشانه $\sqrt{}$ را ریشگی و عدد n را شمارهٔ ریشه نامیم

ریشهٔ دوم a یعنی $\sqrt[2]{a}$ را اغلب چنین نویسند $\sqrt{a}$ (یعنی بدون شمارهٔ ریشه)

۷۳- چون توان جفت هر عدد جبری عددیست مثبت (نمرهٔ ۶۶) بنابراین:

اولاً هیچ عددی نمیتوان یافت که بتواند ریشهٔ جفت عدد منفی باشد

چنانکه عبارتهای $\sqrt{-1}$ (ریشهٔ دوم ۱-) و $\sqrt[4]{-5}$ (ریشهٔ چهارم ۵-)

بدون معنی میباشند

ثانیاً هر عدد مثبت دارای دو ریشه n ام است وقتی که n جفت باشد و این دو ریشه قرینهٔ یکدیگرند

چنانکه عدد ۸۱ دارای دو ریشهٔ دوم است ۹+ و ۹- : $81=(\pm 9)^2$

گوییم ریشهٔ دوم ۸۱ مساویست با بعلاوه یا منهای ۹

وهمچنین عدد ۸۱ دارای دو ریشهٔ چهارم ۳+ و ۳- میباشد: $81=(\pm 3)^4$

ثالثاً هر عدد جبری (خواه مثبت یا منفی) دارای یک ریشه از شمارهٔ فرد است

چنانکه ۸- یک ریشهٔ سوم دارد مساوی ۲- : $\sqrt[3]{-8}=-2$

وهمچنین ریشه پنجم ۳۲ عدد ۲ است : $\sqrt[5]{32}=2$

درکلیهٔ حالتها $\sqrt[n]{0} = 0$ (n جفت یا تاق)

۷۴ـ ازاینجا وازآنچه درتوان عددهای جبری گفتیم نتیجه میشود:

۱ـ شرط لازم وکافی برای اینکه دو عدد جبری مساوی باشند اینستکه توان تاق یا ریشهٔ تاق آندو عدد مساوی باشند

۲ـ شرط لازم وکافی برای اینکه دو عدد جبری هم نشانه (هردو مثبت یا هردو منفی) مساوی باشند اینست که توان جفت یا (اگر مثبت باشند) ریشه های جفت آن دو عدد مساوی باشند

این نتیجه ها رامیتوان مثلاً برای نشان دادن تساوی دو عدد که ظاهراً مختلف میباشند بکاربرد

مثلاً میخواهیم ثابت کنیم که دو عدد $\sqrt{۴۸}$ و $۴\sqrt{۳}$ تساویند چون هردو مثبت میباشند کافی است ثابت کنیم توانهای دوم آنها یکی است توان دوم اولی ۴۸ وتوان دوم دومی چنین است

$$(۴\sqrt{۳})^۲ = ۴^۲ \times (\sqrt{۳})^۲ = ۱۶ \times ۳ = ۴۸$$

۷۵ـ ضرب ریشه ها ـ حاصل ضرب ریشه های چند عدد که دارای یک شماره باشند مساویست با ریشهٔ حاصل ضرب همان چند عدد با همان شماره

یعنی مثلاً $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{abc}$

زیرا چون دوطرف رابتوان m رسانیم میشود

$$a \cdot b \cdot c = abc$$

پس $\sqrt{۲} \cdot \sqrt{۵} = \sqrt{۱۰}$

$$\sqrt[۳]{-۳} \cdot \sqrt[۳]{۹} = \sqrt[۳]{-۲۷} = -۳$$

۷۶- خارج قسمت دو ریشه - خارج قسمت ریشهٔ m اُم دو عدد مساویست با ریشه m اُم خارج قسمت آن دو عدد

یعنی مثلاً

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

زیرا چون دو طرف را بتوان m رسانیم درستی این تساوی معلوم میشود

پس

$$\sqrt{۸} : \sqrt{۲} = \sqrt{\frac{۸}{۲}} = \sqrt{۴} = ۲$$

$$\sqrt[۵]{-۹} : \sqrt[۵]{۸۱} = \sqrt[۵]{\frac{-۹}{۸۱}} = \sqrt[۵]{\frac{-۱}{۹}}$$

پرسش های ساده

حاصل ضرب و خارج قسمتهای زیر را بدست آورید :

$\sqrt{۲} \cdot \sqrt{۳}$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{-۲} \cdot \sqrt[۳]{-۴}$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{۲} \cdot \sqrt[۴]{۸}$

$\sqrt[۴]{۴} \cdot \sqrt[۳]{-۱۶}$ $\qquad$ $\sqrt[۵]{۱۶} \cdot \sqrt[۵]{-۲}$ $\qquad$ $\sqrt[۷]{-a^{۵}} \cdot \sqrt[۷]{-a^{۲}}$

$\sqrt{۲۰} : \sqrt{۵}$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{۳} : \sqrt[۳]{-۸۱}$ $\qquad$ $\sqrt[۴]{۸} : \sqrt[۴]{۲}$

$\sqrt[۳]{-۲۴} : \sqrt[۳]{-۴}$ $\qquad$ $\sqrt[۵]{۶۴} \cdot \sqrt[۵]{-۲}$ $\qquad$ $\sqrt[۷]{x^{۱۶}} : \sqrt[۷]{x^{۲}}$

۷۷- عکس قاعده های بالا نیز درست است یعنی :

اولاً ریشه m اُم حاصل ضرب چند عدد مساوی حاصل ضرب ریشهٔ m اُم هر یک از آنها است

$$\sqrt[m]{abc} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c}$$

بنا براین

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8\times 2} = \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[4]{a^7} = \sqrt[4]{a^4\cdot a^3} = \sqrt[4]{a^4}\cdot\sqrt[4]{a^3} = |a|\sqrt[4]{a^3}$$

ثانیاً ریشهٔ m اُم خارج قسمت دو عدد مساوی خارج قسمت ریشهٔ m اُم آنها است

یعنی

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

بنا براین

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{8}{3}} = -\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$$

پرسش های ساده

ریشه های زیر را ساده کنید:

$\sqrt{8}$ $\quad \sqrt{27}$ $\quad \sqrt{125}$ $\quad \sqrt{45}$

$\sqrt[3]{81}$ $\quad \sqrt[3]{-16}$ $\quad \sqrt[3]{54}$ $\quad \sqrt[5]{-64}$

$\sqrt{\frac{6}{8}}$ $\quad \sqrt{\frac{12}{27}}$ $\quad \sqrt{\frac{3}{27}}$ $\quad \sqrt{\frac{9}{16}}$

$\sqrt[3]{-\frac{16}{96}}$ $\quad \sqrt[3]{-\frac{54}{10}}$ $\quad \sqrt[4]{\frac{64}{81}}$ $\quad \sqrt[5]{\frac{-6}{64}}$

تمرین

۱- عبارتهای زیر را حساب کنید

$$(4 - \frac{3}{4}) : (\frac{7}{3}$$

$$(-4)(+\frac{3}{5}) :$$

$$(۷ + \frac{۴}{۵} + \frac{-۱}{۱۵})(-۳) + \frac{-۴}{۱۱} + (۹ - \frac{-۶}{۵}) : \frac{۱۵}{۱۲۰}$$

$$۴(۳ - \frac{۵}{۲} + \frac{۱۱}{۲۸})(\frac{-۴۹}{۲۴}) - (۱۰ - ۴ - \frac{۶}{۵} + ۲) : \frac{۴۵}{۸}$$

۲- مطلوبست محاسبه عبارت

$$\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} \right) : \left(۱ + \frac{a+b}{a-b} \right)$$

درحالت های زیر

$a=۱ ; b=۷$ و $a=۴ ; b=۳$ و $a=-۶ ; b=۵$ و $a=-۱۰ ; b=-۱۵$

۳- حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید

$$۳^۳ - (-۲)^۲ \quad ; \quad ۳^۳ + (-۲)^۳ \quad ; \quad (-۱)^۲ + (-۱)^۳ - (-۲)^۱$$

$$(-۳)^۲ + ۲ \cdot ۳ \cdot (-۴) : (-۴)^۲$$

$$\left[(-۵)(+۲)(-۳) : (-۲) \right]^۳$$

$$(-۵)^۲ + ۳(-۵)^۲(+۴) + ۳(-۵)(-۴)^۲ - ۴^۳$$

۴- عبارتهای زیر را حساب کنید وقتیکه $x=-۳$ و $y=۲$ باشد

$$x^۲ \quad ; \quad x^۳ \quad ; \quad y^۲ \quad ; \quad ۵x^۲y$$

$$x^۲ \pm y^۲ \quad , \quad x^۳ \pm y^۳ \quad ; \quad x^۴ - y^۴ \quad ; \quad \pm ۲xy + y^۲$$

$$x^۳ - ۳x^۲y + ۳xy^۲ - y^۳ \quad , \quad (x+y)^۲ (x-y)^۲ ; (x^۲-y^۲)^۲$$

۵- عبارت $\frac{(۲a+b)(a-۲b)^۲}{۲a^۲b}$ را درحالت های زیر حساب کنید:

$a=۱ ; b=-۱$ و $a=-۳ ; b=۶$ و $a=-۴ ; b=-۲$

۶- درتساویهای $2x^2 - 20x + 50 = 0$ و $x^2 + 12 = 7x$

و $x^2 + x = 12$

بجای x اعداد ± 5 و ± 3 و ± 4 و -8 و $\frac{1}{4}$ را

گذاشته نشان دهید در ازاء کدام اعداد تساوی برقرار خواهد بود

۷- مطلوبست محاسبهٔ عبارتهای زیر:

$$\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{-3} : (-3) \qquad \sqrt{(-4)\times 5\times(-3)+21}$$

$$\sqrt[3]{6(-4)+(-6)9-4}$$

$$\sqrt[3]{100} : \sqrt[3]{-27} \quad . \quad (-3)\sqrt[3]{(-4)(-3)-2}$$

۸- عبارتهای زیر را بازاء $a=16$; $b=27$; $c=24$ حساب کنید

$$\sqrt{\frac{3b}{a}} - \sqrt[3]{\frac{b}{9c}} + \sqrt[4]{\frac{b}{12a}}$$

$$\sqrt[3]{4a} - \sqrt{\frac{25}{12b}} + \sqrt[3]{\frac{a}{2b}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{3a}{2c}} - \sqrt[4]{\frac{9b}{2c}} + \sqrt{\frac{a}{3c}}$$

$$\frac{3}{8}a - \sqrt{\frac{4a}{3b}} - \sqrt[3]{\frac{4ab}{b^2}}$$

۹- عبارتهای زیر را حساب کنید وقتی که $a=-4$; $b=-3$

و $c=2$; $x=-1$; $y=-3$; $z=1$ باشد

$$\sqrt[3]{b^3c^6} + \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\sqrt[3]{a^3+b^3+17cx}$$

$$\sqrt{2x^3 - 2bc - b^2} \quad : \quad \sqrt{a^4 + 4b}$$

$$\sqrt{(x^2 + y^3 + z)(x - y - 3z)} \quad : \quad \sqrt{-2x - 2y + z}$$

۱۰- میدانیم راهی که جسمی در موقع افتادن می پیماید از دستور $e = \frac{1}{2}gt^2$ بدست میآید که در آن e درازای راه و g تقریباً مساوی ۹٫۸۱ متر و t ثانیه هائیست که جسم درحرکت است - حال اگر بلندی برجی سی و پنج متر باشد معلوم کنید چند ثانیه طول میکشد تا سنگی که از بالای آن رها شده بپای برج برسد؟

۱۱- زمینی است بشکل مستطیل که درازای آن ۲۵٫۳۲ متر و پهنایش ۱۲٫۷۵ متر است میخواهیم آنرا با زمینی بشکل مربع که مساحتش مساوی مساحت آن مستطیل باشد عوض کنیم ضلع این مربع را حساب کنید.

۱۲- زمینی است بشکل مثلث متساوی الاضلاع که درازای هرضلعش ۲۵٫۷۵ متر است ارتفاع این مثلث را تا $\frac{1}{10}$ متر تقریب حساب کنید.

۱۳- بین S و V بترتیب سطح و حجم یک کره این رابطه برقرار است $S^3 = 36\pi V^2$ اگر سطح این کره مساوی ۷۲ متر مربع باشد حجم آن چقدر است؟

۱۴- محیط مثلث متساوی الساقینی ۱۶ متر است و یکی از ساقهای آن ۱۰ متر میباشد ارتفاع و مساحت آنرا حساب کنید.

فصل سوم - عبارتهای جبری و هم چندیها

الف - عبارتهای جبری

۷۷ - عبارت جبری تشکیل شده است از یک رشته حروف و اعداد که بوسیله نشانه های جبری بهم پیوسته باشند

مانند $\frac{a+b}{100}$ و $2(a+b)-x$ و $\sqrt{5a-3b^2}-\frac{3}{4}$

۷۸ - **یک جمله** - هر عبارتیکه بین حروف و اعداد آن عمل جمع و تفریق نباشد یکجمله یا جمله نامند

مانند -5 و $\frac{1}{2}a$ و x و $-n^2$ و $-2xy$ و $\frac{a^2\sqrt{3}}{x\sqrt{2}}$

۷۹ - **ضریب** - چون عملهای بین اعداد یک جمله مفروضی را اجرا نمائیم حاصل آنرا ضریب عددی یک جمله مفروض گویند

مثلاً در یک جمله $-\frac{3}{2}x^2 \cdot 5\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ حاصل $\sqrt{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot 5\cdot -\frac{3}{2}$ یعنی $-\frac{15\sqrt{3}}{8}$ ضریب عددی یک جمله مفروض است.

وهمچنین در یک جمله های بالا ضریبهای عددی بترتیب عبارتند از -5 و $\frac{1}{2}$ و 1 و -1 و -2 و $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

وبطور کلی ضریب یکجمله برحسب یکی از حرفهای آن عبارت از حاصل اعمالی است که بین سایر

حرفها و عددهای یک جمله انجام میشود

پرسش های ساده

ضریب عددی و همچنین ضریب های یک جمله های زیر را بر حسب حرف x بیان کنید

$-3x \qquad \frac{1}{2}a^2b \qquad \sqrt{\frac{3}{5}}\,xy^2 \qquad -x^2y$

$xy \qquad \frac{-3}{\sqrt{2}}a \qquad \frac{-2abx}{3\sqrt{y}} \qquad -\frac{5\sqrt{2}\,yx}{2a}$

۸۰ - جمله های متشابه - جمله های متشابه جمله هائی را گویند که تنها در ضریب اختلاف داشته باشند

مانند ۷ و ۳- و ۵ و همچنین $2\sqrt{7}$ و $3\sqrt{7}$ و همچنین

$-5a^2x$ و $6a^2x$ و $-\frac{\sqrt{2}}{3}a^2x$

۸۱ - جمع جمله های متشابه - روشن است که :

$$2a + 5a = 7a$$

$$xy + 3xy + 8xy = 12xy$$

$$3b^2 + (-4b^2) = -b^2$$

$$3abc + (-abc) + 4abc = 6abc$$

بعلاوه میتوانیم درستی این تساویها را اینطور تحقیق کنیم که بجای حرفها عددهای جبری بگذاریم و ببینیم که اندازهٔ عددی دو طرف تساویها یکی است

بنابراین برای جمع جمله های متشابه این قاعده را داریم:

۸۲ـ قاعده ـ حاصل جمع چند جملهٔ متشابه جمله ایست متشابهٔ با آنها که ضریبش حاصل جمع جبری ضریبها باشد

مانند

$$۶a^۴ + ۴a^۴ = (۶ + ۴)a^۴ = ۱۰a^۴$$

$$۳ax + ۲ax + ۸ax = (۳ + ۲ + ۸)ax$$

$$= ۱۳ax$$

$$x^۲y + (-x^۲y) = (۱ - ۱)x^۲y = ۰$$

تبصره ـ در بعضی جاها که اشتباهی رخ ندهد میتوان عبارتهائی مانند $(x + y)$ و $\sqrt{۷ - ۳x}$ را یک جملهٔ درنظر گرفت.

بنا براین:

$$۶(x + y) + [-۵(x + y)] + (x + y) = ۲(x + y)$$

$$\sqrt{۷ - ۳x} + (-۷\sqrt{۷ - ۳x}) + ۳\sqrt{۷ - ۳x} = -۳\sqrt{۷ - ۳x}$$

پرسش های ساده

حاصل عبارتهای زیر را پیدا کنید:

$-۲۱a + ۷a$ — $۵a + ۳a$

$-xy + ۳xy - ۲xy$ — $-۹x^۲ - ۳x^۲$

$۲\sqrt{y} - ۳\sqrt{y} + \sqrt{y}$ — $-\frac{۲}{x} + \frac{۷}{x}$

$۲(۵ - x) + ۳(۵ - x)$

$$۲(a+\sqrt{ج}) - ۴(a+\sqrt{ج}) + ۲(a+\sqrt{ج})$$

۸۳ - جمع جمله های غیر متشابه - برای جمع جمله های غیر متشابه آنها را با نشانه های خود بدنبال هم مینویسند

مثلاً حاصل جمع دو جمله $۲a-$ و $۳ج$ را چنین نویسند $-۲a + ۳ج$

۸۴ - تفریق یک جمله ها - چون یکجمله در حکم یک جمله عددیست (بازاء مقدارهای عددی حرفها) برای تفریق موافق (نمره ۲۸) باید نشانه یکجمله کاسته را تغییر داده با یک جمله کاهش یاب جمع جبری نمائیم

مثلاً برای تفریق $-۳xy$ از $۷xy$ راه عمل چنین است:

$$۷xy - (-۳xy) = ۷xy + (+۳xy) = ۱۰xy$$

همچنین

$$-۵\sqrt{x^۲+y^۲} - (-۲\sqrt{x^۲+y^۲}) =$$

$$-۵\sqrt{x^۲+y^۲} + (+۲\sqrt{x^۲+y^۲}) = -۳\sqrt{x^۲+y^۲}$$

پرسش های ساده

تفریق های زیر را عمل کنید:

$x^۲$ از $۵x^۲$ — $a^۲$ از $۲a^۲$

$-۲xy$ ، $-۵xy$ — $\frac{۱}{۲}x^۲y$ ، $-\frac{۳}{۲}x^۲y$

$۳\sqrt{۵x}$ ، $-۳\sqrt{۵x}$ — $-\sqrt[۳]{xy^۲}$ ، $-\sqrt[۳]{xy^۲}$

$-\frac{۱}{۲}a\sqrt{x}$ ، $\frac{۱}{۵}a\sqrt{x}$ — $\frac{۲x^۲}{\sqrt{۵}}$ ، $\frac{-۳x^۲}{\sqrt{۵}}$

۸۵- **چند جمله** - از جمع جبری یک جمله‌ها چند جمله تشکیل میشود مانند b و ax و $ax^2 + bx + c$ ؛ $2xy - 2y + b\sqrt{2} - 1$

۸۶- **ساده کردن چند جمله‌ها** - چون چند جمله مجموع چند یک جمله ایست یعنی در حقیقت مجموع چند عدد جبری است پس میتوان جای آن یک جمله‌ها را بدلخواه تغییر داد (نمرهٔ ۲۴) بخصوص میتوان یک جمله‌های متشابه را پهلوی هم نوشت و بجای جمله‌های متشابه مجموعشان را قرار داد این عمل را ساده کردن چند جمله نامیم

مثال - چند جمله

$$8a^2b - 4bc^2 + 1 + 3a^2b - 2c + bc^2 - 2$$

رامیتوان (با قرار دادن جمله‌های متشابه در داخل پرانتز) چنین نوشت

$$(8a^2b + 3a^2b) + (-4bc^2 + bc^2) - 2c + (1 - 2)$$

پس از ساده کردن چنین میشود

$$11a^2b - 3bc^2 - 2c - 1$$

ساده کردن چند جمله‌ها برحسب یکی از حرفهای آنها:

مثال ۱- چند جملهٔ $ax + bx + 1$ برحسب حرف x دارای دو جملهٔ متشابه ax و bx میباشد که مجموعشان $(a + b)x$ است

بنابراین چند جملهٔ بالا پس از ساده کردن چنین میشود

$$(a + b)x + 1$$

مثال ۲ـ درچندجمله‌ئی

$$2x^4 + 3x^2 - ax^4 - 2ax^2 + x^3 - 3bx + x$$

جمله های متشابه برحسب حرف x عبارتند از ($2x^4$ و $-ax^4$) و ($3x^2$ و $-2ax^2$) و ($-3bx$ و x) بنابراین عبارت جبری بالا پس از ساده شدن بدینصورت درمیآید

$$(2-a)x^4 + (3-2a)x^2 + x^3 + (-3b+1)x$$

پرسش های ساده

چندجمله‌ئی های زیر را برحسب حرف x ساده کنید:

$$3x - x^2 + 2x - 1 \qquad x^3 - 2x^2 + ax^3 - x^2$$

$$x^2y - xy^2 + x^2 - x \qquad 2 - ax + 3x - 1$$

$$x\sqrt{2} - x\sqrt{3} + 1 \qquad x^2\sqrt{2} - x^2 + 1 - x$$

$$2x^2 - \frac{1}{5}x^2 + 7x - a + bx$$

۸۷ـ مرتب کردن چندجمله‌ئی بحسب توانهای صعودی یا نزولی یکحرف

در نوشتن عبارت چندجمله‌ئی اغلب یکحرف آنرا درنظر گرفته چندجمله‌ئی را بنسبت بتوانهای آنحرف مرتب می‌کنند یعنی طوری می‌نویسند که درجهٔ آنحرف در جمله های آن چندجمله‌ئی یا مرتباً تنزل کند و یا ترقی نماید درحالت اول گوئیم چندجمله‌ئی بحسب توانهای نزولی آن حرف مرتب شده و درحالت دوم گفته میشود که بحسب توانهای صعودی آن حرف مرتب شده است.

مثال ۱ـ چندجمله‌ئی

$$2x^3y - 5y^2x^4 + ax - 2b + y^5x^2$$

و اگر بحسب توانهای نزولی x مرتب کنیم چنین نوشته میشود

$$-5y^2x^4 + 2x^3y + y^5x^2 + ax - 2b$$

و اگر بحسب توانهای صعودی x مرتب شود چنین نوشته میشود

$$-2b + ax + y^5x^2 + 2x^3y - 5y^2x^4$$

نمای x در جملهٔ $-2b$ صفر است زیرا میتوان نوشت

$$-2b = -2bx^0$$

مثال ۲ - چند جملهٔ بالا را اگر بترتیب توانهای نزولی و صعودی y مرتب کنیم بترتیب خواهیم داشت

$$x^2y^5 - 5x^4y^2 + 2x^3y + ax - 2b$$

$$ax - 2b + 2x^3y - 5x^4y^2 + x^2y^5$$

نمای y در $-2b$ و ax صفر است یا بعبارت دیگر ضریب y^0 در چند جملهٔ مفروض $ax - 2b$ است

۸۸ - درجهٔ چند جمله نسبت بیک حرف آن و چند جمله کامل و ناقص -

این درجه عبارتست از بزرگترین درجه ای که آن حرف در جمله های آن چند جمله دارد چنانکه چند جملهٔ بالا نسبت به x از درجهٔ چهارم است و نسبت به y از درجهٔ پنجم و چون این چند جمله نسبت به x شامل تمام درجه های کمتر از ۴ است گوئیم که چند جمله درجهٔ چهارم **کامل** است نسبت به x

ولی چون تمام درجه های پائین تر از ۵ را از y ندارد (مثلاً جمله ایکه در آن y^4 و y^3 شد ندارد) گوئیم چند جمله بالا درجهٔ پنجم **ناقص** است نسبت به y

مثال - چند جملهٔ کامل درجهٔ اول نسبت به x شامل دو جمله است یکجمله دارای x از درجهٔ اول و یک جمله بدون x (یا دارای x از درجهٔ صفر) پس بصورت کلی $ax + b$ خواهد بود.

همچنین چند جملهٔ کامل درجهٔ دوم نسبت به x دارای سه جمله است و بصورت کلی

$Ax^2 + Bx + C$ است

بطور کلی چند جملهٔ کامل از درجهٔ n ام دارای $n + 1$ جمله است.

پرسش های ساده

چند جمله های زیر را مرتب نموده و درجهٔ آنها را بر حسب هر یک از حرفهای آنها معلوم نموده و معین کنید کدام یک کامل و کدام یک ناقصند

$2x - y$ $2x - 3x^2 + y - 1$

$ax^2 - 1$ $ax^2 - 2bx$

$x^3 + 1 - xy + 2y^2$ $1 - 3x^3 - 2ax$

$x^3y - y + 1$ $xy^2 - y^2x + 1$

$\sqrt{3}x - x\sqrt{5} - y^3\sqrt{3}$ $2y^2 - y + 2xy^3 - 1$

۸۹ - جمع چند جمله ها با یکدیگر - برای جمع چند جمله ها با یکدیگر جمله های آنها را با نشانه های خودشان بدنبال هم مینویسیم و چند جملهٔ حاصل را مطابق قاعدهٔ بالا ساده میکنیم

برای این کار بجای آنکه چند جمله‌ها را دنبال هم بنویسیم بهتر این است که :

ابتدا هر یک را ساده کرده بعد طوری بنویسیم که جمله های متشابه آنها دسته بدسته در یک ستون قرار گیرند

مثال - برای جمع $2a-3b-ac^2$ و $2b+3ac^2$ و $-3a-7ac^2+11$ صورت عمل چنین است :

$$
\begin{array}{rrrr}
2a & -3b & -ac^2 & \\
 & 2b & +3ac^2 & \\
-3a & & -7ac^2 & +11 \\
\hline
-a & -b & -5ac^2 & +11
\end{array}
$$

حاصل جمع .... $-a-b-5ac^2+11$

چون هر یک از این چند جمله ها در حقیقت یک چند جمله عددیست پس باید مجموع جبری مقدار عددی آنها (بازاء تمام مقدارهای عددی a و b و c) مساوی مقدار عددی حاصل جمع باشد (بازاء همان مقدارهای a و b و c)

چنانکه برای تحقیق اگر $a=-2$ و $b=5$ و $c=-1$ باشد خواهیم داشت

$$
\begin{array}{rrrrl}
2a & -3b & -ac^2 & & = -4-15+2 = -17 \\
 & 2b & +3ac^2 & & = 10-6 = 4 \\
-3a & & -7ac^2 & +11 & = +6+14+11 = 31 \\
\hline
-a & -b & -5ac^2 & +11 & = +2-5+10+11 = 18
\end{array}
$$

مثال دیگر- حاصل جمع چند جمله های $ax + 4x + 3x^2$

$1 - bx + cx^2 - 2ax^2$ و $4bx - x + a$ را بحسب حرف x

بدست آورید

میتوان آنهـا را با نشانه هایشان دنبال هم نوشته چند جمله حاصل را برحسب x ساده نمود

ونیز ممکن است ابتدا هریک از چند جمله های بالا را ساده کنیم ازینقرار:

$$(a+4)x + 3x^2 \quad \text{و} \quad (c-2a)x^2 + bx - 1$$

$$\text{و} \quad (4b-1)x + a$$

و برای اینکه چیزی از قلم نیفتد بهتر آنستکه هریک از چند جمله ها را مثلا بترتیب توانهای صعودی x مرتب کرده بعد موافق قاعده بالا عمل نمائیم درین صورت خواهیم داشت:

$$
\begin{array}{llll}
 & (a+4)x + & 3x^2 \\
-1 + & bx + & (c-2a)x^2 \\
a + & (4b-1)x & \\
\hline
-1 + a + (a+5b+3)x + (c-2a+3)x^2
\end{array}
$$

۹۰- تفریق چند جمله - چون هر چند جمله درحقیقت چند جمله عددی است برای تفریق موافق (نمرهٔ ۳۶) بایدنشانهٔ جمله های کاسته را تغییر داده باجمله های کاهش یاب جمع جبری نمود..

مثال ۱- میخواهیم $5a^2c$ را از $bx + 3a^2c - 1$ تفریق کنیم طرز عمل بدین قرار

خواهد بود.

$$bx + 3a^2c - 1 - (5a^2c) = bx + 3a^2c - 1 + (-5a^2c)$$

$$= bx - 2a^2c - 1$$

مثال ۲- میخواهیم $4x^2 - 2xy - 11$ را از $3x^2 - 2xy + 5y^2 - 7$ تفریق کنیم جمله های کاسته را تغییر نشانه داده با کاهش یاب جمع میکنیم ازینقرار:

$$\begin{array}{l} 3x^2 - 2xy + 5y^2 - 7 \\ -4x^2 + 2xy \qquad + 11 \\ \hline -x^2 \qquad\quad + 5y^2 + 4 \end{array}$$

همان طوریکه در جمع گفته شد میتوان بجای حرفها عدد قرار داده درستی عمل را تحقیق نمود چنانکه اگر $x = 2$ و $y = -5$ باشد کاهش یاب ۱۵۰ و کاسته ۲۵ و بنابراین تفاضل ۱۲۵ خواهد بود و اندازهٔ عددی $-x^2 + 5y^2 + 4$ نیز ۱۲۵ است

تمرین ها

۱- عبارتهای زیر را بحسب حرف x ساده نموده و مرتب کنید:

$ax + 4x - a$ $\qquad$ $ax^2 - 2mx + x - 1$

$x^3 - 2ax^2 - bx + 2 - x^2 + x$

$x^2 - ax + bx^3 - bx + 2x^2 - 5$

$3ax^2 - 2bx + 5x^2y - 7ax$

$x^2 - mx^2 + 2mx - x + m - 1$ ،

$k^2x^2 - (x-k)(k-x) + m(k^2 - x^2)$

۲- عبارتهای زیر را ساده نموده ضمناً بازاء $x=-1$ و $y=-2$ و $z=1$ درستی عمل را تحقیق کنید

$(x^2 + xy - y^2) - (z^2 - yz - y^2) + (xy + z^2 - x^2)$

$(x^2 + y^2 - 2xy) + (2z^2 - 4y^2 - 2yz) - (2x^2 - 4z^2 + 3xy)$

$(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^2) - (x^2 - \frac{y^2}{3} - z^2) - (\frac{x^2}{2} - y^2 - \frac{z^2}{3})$

۳- حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$(2a - 2bc + c) - (5a - b + c)$

$(3x - 2y + 5) - (2x + 3y - 7)$

$-(4\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 7) - (2\sqrt{3} + 5\sqrt{2} + 10)$

$-3x^2 - (5y - 7x^2 + 11) - (3x^2 - 4y + 2) + 5x^2$

$-(7a^3 + 4b^3) - (a^3 - 12b^3 + 16c^3) + 6a^3 - (6c^3 - 9b^3)$

$3ac - (ab + d) - [2ab - 2d - (-d - 4ac + 3ab)] - 2ac$

$m^2 - (x - y - m^2) - 3p - [4m^2 - (8p - x - y)]$

۴- بفرض $A = -5x + 3y + 2z$ ، $B = -5y + 3x + 2z$

$C = -4z + 3x + 2z$

مطلوبست محاسبهٔ عبارتهای $A+B+C$ و $A-B+C$ و $-A+B-C$ و $A+B-C$

۵ - بفرض

$$A = x^5 + x^3 - 8x^2 - 8$$

$$B = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$$

$$C = x^5 - 2x^4 + x - 2$$

$$D = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$$

مطلوبست محاسبهٔ $\pm A \pm B \pm C \pm D$ باترکیب نشانه‌های مختلف، در هریک ازین حالتها بازاء $x = -2$ درستی عمل را امتحان کنید

۶ - معلوم کنید در x سال قبل سن شخصی چقدر بوده است درصورتیکه بدانیم a سال بعد سنش ۵۲ ساله میشود

۷ - ایرج a ریال و کیومرث b ریال و جمشید c ریال پول داشتند قرار گذاشتند که اول ایرج از پول خود به دو نفر رفیق خود آنقدر بدهد تا پول آنها دو برابر شود و بعد کیومرث از آنچه که دارد پولهای دو رفیق خود را دو برابر کند و پس از او جمشید همین کار را بنماید معلوم کنید پس از این کار مبلغ پول هریک چقدر میشود

۸ - چهار نفر مبلغ A ریال را بدین قسم بین خود تقسیم نمودند اولی a ریال و نیمهٔ باقیمانده را برمیدارد دومی b ریال و $\frac{1}{3}$ باقیمانده را و سومی c ریال و $\frac{1}{4}$ باقیمانده را و آنچه که میماند از آن چهارمی خواهد بود. سهم هر یک چقدر است؟

ب- همچندی

۹۱- تعریف- همچندی (معادله) عبارتست از تساوی میان دو عبارت جبری مانند:

$$2 - 3 = 4 - 5$$

$$x - 2y = 2x + y - x - 3y$$

$$x - 3 = 2x$$

$$x^2 - x = 2$$

$$2x - y = 0$$

عبارت طرف چپ نشانه تساوی را **طرف اول** همچندی و عبارت طرف راست آن را **طرف دوم** همچندی نامیم

مثلاً در همچندی دوم طرف اول $x - 2y$ است و در همچندی آخری طرف دوم صفر است

در همچندیهای بالا همچندی اول یک **تساوی عددی** است

در همچندی دوم اگر طرف دوم را ساده کنیم حاصل $x - 2y$ یعنی عین طرف اول میشود

بنابراین هر مقدار بجای x و y قرار دهیم تساوی درست است

هر همچندی (مانند همچندی دوم) را که دو طرف آن پس از ساده کردن عین یکدیگر شوند **اتحاد** گوییم

بنابراین در اتحاد هر مقدار بجای حرفها در دو طرف قرار دهیم تساوی درست است

معمولاً در اتحادها بجای نشانه $=$ نشانه $\equiv$ را میگذارند

در همچندی سوم دو طرف دو عبارت مختلف میباشند و مساوی نیستند مگر آنکه بجای x یک یا چند مقدار معینی (درین مثال عدد ۲-) گذاشته شود همچنین است دو همچندی چهارم و پنجم - درین همچندیها دیده میشود که تساوی دو طرف همیشه برقرار نبوده و فقط وقتی برقرار است که بجای بعضی از حرفها مقدارهای معینی گذارده شود

مثلا در همچندی $x - 3 = 7$ دو طرف آن وقتی مساوی اند که بجای x عدد ۱۰ را قرار دهیم

و همچنین در همچندی $x^2 - x = 2$ تساوی وقتی درست است که بجای x یا ۲ و یا ۱- گذارده شود.

مقدار یا مقدارهائی را که بجای بعضی از حرفها باید گذارد تا دو طرف همچندی باهم مساوی شوند پاسخ (یا ریشه) یا پاسخهای (یا ریشه های) همچندی گویند

عدد ۱۰ در همچندی $x - 3 = 7$ و دو عدد ۲ و ۱- در همچندی $x^2 - x = 2$ پاسخ یا ریشه های این دو همچندی هستند

حرفی را که باید پاسخ همچندی را بجای آن گذارد تا دو طرف باهم مساوی شوند **مجهول** همچندی و سایر مقدارهای دو طرف را **معلوم** های همچندی نامیم

مثلاً در همچندی $x - 3 = 7$ حرف x مجهول است

همچندی [illegible] اگر a معلوم باشد x مجهول همچندی است

پرسش های ساده

۱- ثابت کنید که همچندی های زیر اتحاد هستند

$x - a = -(a - x)$

$a + 6 = 7 + a - 1$

$3x - 1 + x + 1 - 4x = 0$

$a + b - x = 2a - 2x + 3b - (a - x + 2b)$

$a^2 - (x + 2y - 1) = 2a^2 - 2x - (a^2 - x + 2y) + 1$

۲- ببینید آیا هرکدام از عددهای داخل پرانتز ریشهٔ همچندی ردیف خود هست یا نیست؟

$x - 3 = 2$	(5)	$2y + 5 = 11$	(3)
$4 - y = 2$	(3)	$6y - 10 = 2$	(1)
$3 + t = 6$	(3)	$4 - 5a = -10$	(-6)
$4 - x^2 = 7$	(-1)	$2m^2 - 2 = 0$	(± 1)
$4 - a^2 = 5$	(2)	$x^2 - 2x = 8$	(-2)

۹۴- همچندیهای هم ارز - دو همچندی را هم ارز گویند هرگاه ریشه یا ریشه های آنها مساوی باشد

مانند $2x + 3 = 15$ و $x - 1 = 5$ که ریشهٔ هردو ۶ است

و دو همچندی $x^2 = 3x - 2$ و $2x^2 + 4 = 6x$ که ریشه های آنها ۲ و ۱ است

۹۳- حل همچندی - حل کردن همچندی یعنی یافتن ریشه یا ریشه های آن .

برای حل کردن همچندی باید آن را بیک عده همچندیهای هم ارز که بتدریج هر یک از دیگری ساده تر باشند تبدیل نمود بطوریکه آخرین همچندی جواب را روشن سازد .

برای این مقصود اصل های زیر را که بمناسبت ساده بودن احتیاجی بدلیل ندارد باید درنظرداشت :

۹۴- اصل ۱- هرگاه بدو طرف همچندی یک مقدار جمع کنیم ، یا از دو طرف آن یک مقدار کم کنیم ریشهٔ همچندی تغییر نمیکند یعنی همچندی حاصل هم ارز است با همچندی مفروض

مثال - ریشهٔ همچندی $x + ۲ = ۵$ را پیدا کنید

بنا باصل بالا از دو طرف ۲ یکه کم میکنیم نتیجه میشود

$$x + ۲ - ۲ = ۵ - ۲$$

و یا $x = ۵ - ۲$ یعنی $x = ۳$

۹۵- نتیجه - اولاً- دو عبارت مساوی و هم نشانه را میتوان از دو طرف همچندی حذف نمود

زیرا بنا باصل ۱ میتوان این عبارت مساوی را از دو طرف کم کرد چنانکه دو طرف همچندی $x^۲ - ۳x - a = ۵x + x^۲ - ۱ - a$ دارای دو جملهٔ $x^۲$ و a است میتوان این دو جمله را حذف کرد همچندی بصورت سادهٔ $-۳x = ۵x - ۱$ درمیآید

ثانیاً میتوان عبارتی را ازیکطرف همچندی بطرف دیگر برد بشرط اینکه نشانهٔ آن را بپذیرداد. زیرا مثل این است که آن عبارت را از دو طرف کم کرده باشیم

مثلاً در همچندی $x - a = 2a$ چون $-a$ را بطرف دیگر ببریم این همچندی بدست باید $x = 2a + a$ ویا $x = 3a$

همچنین همچندی $x^2 + 1 - 2x = 2x^2 - 4$ با همچندی $2x = 2x^2 - x^2 - 4 + 1$ ویا $2x = x^2 - 3$ هم ارزاست درین مثال عبارت $-1 + x^2$ را بطرف دوم بردیم

پرسش های ساده

همچندی های زیر را حل کنید.

$y + 3 = 12$ $\qquad$ $3 + a = 6$ $\qquad$ $x - 1 = 2$

$z + 11 = 20$ $\qquad$ $x - 2 = -2$ $\qquad$ $-6 + l = 2$

$t - 5 = 1$ $\qquad$ $2 + k = 0$ $\qquad$ $x + 1 = 1$

$0 = 5 - h$ $\qquad$ $12 = d - 8$ $\qquad$ $-1 + y = -3$

۹۶- اصل ۲- چون دو طرف همچندی را در عددی جبری ضرب کنیم همچندی که حاصل میشود با همچندی مفروض هم ارزاست

مثال - ریشهٔ همچندی $\frac{x}{3} = 2$ را تعیین کنید

بنا باصل ۲ دو طرف را در ۳ ضرب میکنیم نتیجه میشود

$$x = 6$$

پرسش های شفاهی

ریشه هر همچندی را بدست آورید:

$\frac{y}{4} = 10$	$\frac{a}{5} = 8$	$\frac{x}{3} = 1$
$\frac{x}{5} = -\frac{1}{5}$	$\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{x}{2} = -6$
$\frac{a}{4} = -3$	$-\frac{1}{4} = \frac{y}{8}$	$-1 = \frac{z}{7}$
$-\frac{5}{3} = \frac{-z}{9}$	$-\frac{y}{4} = -\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{5} = \frac{m}{10}$

۹۷- اصل ۳- هرگاه دو طرف همچندی را در یک عدد جبری (بجز صفر) تقسیم کنیم ریشه همچندی تغییر نمی کند

مثال - همچندی $5x = 10$ را حل کنید

بنا باصل ۳ میتوان دو طرف را بر ۵ تقسیم نمود نتیجه میشود

$$x = 2$$

پرسش های شفاهی

همچندی های زیر را حل کنید

$56 = -14x$	$-3x = 15$	$6x = 12$
$18 = 5y$	$-3 = 2m$	$8a = 24$
$-125 = -25x$	$12y = 11$	$7b = -28$

$-۱۳y = -۲۶$ $\qquad -۲R = ۲۴$ $\qquad ۵z = -۳$

مثال ۱ـ همچندی زیر را حل کنید

$$۵x - ۲ = ۲x + ۷$$

بنا باصل ۱ از دو طرف ۲x تفریق می‌کنیم نتیجه میشود

$$۳x - ۲ = ۷$$

بعد ۲ یکه بر دو طرف می‌افزائیم (و یا آنکه ۲ـ را بطرف دوم میبریم موافق نتیجهٔ ۲ نمرهٔ ۹۵) حاصل میشود

$$۳x = ۹$$

حال دو طرف را بر ۳ تقسیم میکنیم (موافق اصل ۲) نتیجه میشود

$$x = ۳$$

مثال ۲ـ این همچندی را حل کنید

$$\frac{۳x}{۵} - ۲ = x + ۴$$

اول دو جملهٔ متشابه ۲ـ و ۴+ دو طرف را ساده میکنیم یعنی بنا باصل اول ۲ـ را بطرف دوم میبریم حاصل میشود

$$\frac{۳x}{۵} = x + ۶$$

بنا باصل ۲ دو طرف را در ۵ ضرب می‌کنیم این همچندی بدست میآید.

$$۳x = ۵x + ۳۰$$

بعد ۵x را بطرف اول میبریم (باید نشانهٔ آنرا تغییر داد) نتیجه میشود

$$-۲x = ۳۰$$

باین ترتیب یکطرف فقط دارای مجهول و طرف دیگر فقط دارای مقدار معلوم شده است حال اگر دو طرف را
بر ضریب مجهول تقسیم کنیم مقدار مجهول بدست میآید : $x = -15$

پرسش های شفاهی

همچندیهای زیر را حل کنید :

$8h + 2 = 10$ $3x - 7 = 2$ $\frac{3c}{2} = 6$

$\frac{2y}{5} = 4$ $8h = 16 + 2h$ $2x + 2 = 0$

$-6l = -18$ $7d + 7 = -14$ $5m - 3 = 12$

$\frac{4x}{3} = -40$ $3y - 4 = 5$ $7S - 2 = 12$

۹۸- همچندی یک مجهولی درجهٔ اول - هرگاه یک همچندی پس از بکار بردن اصلهای بالا بصورت $ax = b$ درآید گویند آن همچندی یک مجهولی و از درجهٔ اول است (x مجهول و a و b معلومهای همچندی اند)

۹۹- قاعده برای حل همچندیهای یک مجهولی درجهٔ اول - بنابرآنچه گفته شد برای حل همچندیهای یک مجهولی درجهٔ اول بهتر این است که عملهای زیر را منظماً باجرا نمائیم :

نخست - ساده کردن جمله های متشابه در دو طرف همچندی (از روی اصل ۱) بقسمی که جمله های دو طرف پس از این عمل باهم متشابه نباشند

دوم - از میان بردن مخرجها بوسیلهٔ ضرب دو طرف همچندی در کوچکترین مضرب آنها

از روی اصل ۲) اگر همچندی برخه باشد

سوم - بردن جمله های مجهول بیکطرف و معلوم ها بطرف دیگر (از روی اصل ۱)

چهارم - جمع جبری جمله های هر طرف

پنجم - تقسیم دو طرف بر ضریب مجهول (بنا باصل ۳)

عین این قاعده در مثال ۲ از شماره پیش بکار رفته است

مثال - مطلوبست حل $6x - 7 = 3x + 2$ جمله $3x$ را بطرف اول و -7 را بطرف دوم میبریم نتیجه میشود

$$6x - 3x = 2 + 7 \quad \text{و یا} \quad 3x = 9$$

و پس از تقسیم دو طرف بر ۳ (ضریب مجهول) حاصل میشود $x = 3$

تمرین

همچندیهای زیر را حل کنید:

$a + 14 = 2 - 3a$ ؛ $3x + 2 = 6 + x$

$4z + 3 - z + 5 = z - 10$ ؛ $4z + 2 = 2z$

$4k - 3 = 5k - 16 + 4k - 3$ ؛ $5y - 1 = 2y + 5$

$5z - (3 + 2z) = 9 - 4z$ ؛ $x - (8 - x) = 10$

$9x - 22 - 2x = 100 - 11x - 42$

$z^2 - z + 1 = z^2 + z - 1$ ؛ $y^2 - y = y^2 - 1$

$۱۲z^۲ - ۳z + ۷ = ۲z^۲ + ۵z - ۱۵$

$۳x + ۳۹ - ۳۵x = ۴۷ - ۲۰x - ۸$

$۴y + ۶ - ۳y + ۸ = ۲y + ۲ - ۳y - ۸ + ۵y$

$۲x - ۹ = ۸x + ۱۰ = ۱۵ + ۵x - ۷$

$۵z + ۱۰ + ۸z - ۷ + ۳z = z - ۷$

$۱۳ + ۱۲a + ۱۱ - ۱۰a = ۱۰a - ۱۱ - ۱۲a - ۱۳$

$۳x + ۶ - (۴ - ۷x) = ۱۹x - (۱۱x - ۴)$

$a^۲ - (۲a - ۳) = ۶ - (۷ - ۴a) + a^۲$

مثال ـ مطلوبست حل همچندی

$$\frac{۲x}{۶} - ۶ + \frac{۳x}{۸} + \frac{۱۵}{۴} = ۱۴ + \frac{x}{۶}$$

پس از ساده کردن جمله های متشابه دو طرف ($\frac{۲x}{۶}$ و $\frac{x}{۶}$ همچنین ۶ـ و ۱۴) نتیجه میشود

$$\frac{x}{۶} + \frac{۳x}{۸} + \frac{۱۵}{۴} = ۲۰$$

دو طرف این همچندی را در عدد ۲۴ (کوچکترین مضرب برخه نماها) ضرب می کنیم این همچندی بدست میآید

$$۴x + ۹x + ۹۰ = ۴۸۰$$

و یا $۱۳x = ۳۹۰$ و از آنجا $x = ۳۰$

تمرین

معادله‌های زیر را حل کنید

$$\frac{5a}{3}+\frac{3a}{4}-36.25=0 \qquad \frac{2a}{5}+\frac{3a}{2}=19$$

$$\frac{2y}{3}-\frac{y}{2}+\frac{4y}{5}=29 \qquad \frac{x}{3}+\frac{1}{6}=\frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{7}-\frac{x}{2}=15-x$$

$$\frac{2x}{7}-8=\frac{29x}{28}+\frac{4}{5}-\frac{3x}{4}-\frac{44}{5}$$

$$\frac{3z}{4}-\frac{5z}{12}=\frac{5z}{9}+6-\frac{2z}{9}$$

$$y-\frac{3y}{2}+9=\frac{2y}{3}+4+\frac{5y}{6}-\frac{6y}{5}+\frac{1}{5}$$

$$2x-3=2.25x-5-.4x+2.6$$

$$\frac{a}{2}-\frac{a}{3}+\frac{a}{4}-\frac{a}{6}+\frac{a}{8}+\frac{a}{12}=11$$

$$b=1+\frac{b}{2}+\frac{b}{4}+\frac{b}{8}+\frac{b}{16}+\frac{b}{32}$$

ج - ضرب عبارتهای جبری

۱۰۰- فرض می‌کنیم مقصود بدست آوردن حاصل ضرب یکجمله $5a^3c$ در یک جمله $-3a^2b$ باشد این حاصل ضرب را میتوان نوشت $-3a^2b \times 5a^3c$ - و چون هر یک جمله تشکیل شده است از حاصل ضرب چند سازه بنابراین حاصل ضرب مساویست با حاصل ضرب سازه های آنها در یکدیگر یعنی :

$$-3a^2b \times 5a^3c = -3\times a^2\times b\times 5\times a^3\times c$$

و چون میتوان در حاصل ضرب چند ساز ه جای آنها را بدلخواه تغییر داد پس این حاصل ضرب را میتوان چنین نوشت :

$$-3a^2b \times 5a^3c = -3 \times 5 \times a^2 \times a^3 \times b \times c$$

و یا بنا بر ضرب توانها $-3a^2b \times 5a^3c = -15a^5bc$

روشن است که این تساوی بازاء هر عدد که بجای حرف ها گذارده شود درست است

همینطور $2a^2b \times 3abx = 6a^3b^2x$

$$2a^2b \times (-3abx) = -6a^3b^2x$$

$$-2a^2b \times 3abx = -6a^3b^2x$$

$$-2a^2b \times (-3abx) = 6a^3b^2x$$

یعنی در ضرب دو یا چند یک جمله قاعده نشانه ها بکار میرود

از بیان بالا قاعده زیر بدست میاید :

۱۰۱- قاعده - حاصل ضرب دو یا چند یکجمله خود یکجمله ایست که ضریبش حاصل ضرب ضریبهای عددی آن یکجمله ها (با قید نشانه) بوده و تمام حرفهای آن یک جمله ها را داشته باشد نمای هر یک ازین حرفها مساوی مجموع نماهائیست که آن حرف در هر یک جمله دارد

مثلا $(-2\sqrt{3}ax^2y)(-3\sqrt{5}bxy^3) = 6\sqrt{15}abx^3y^4$

حاصل ضرب های زیر را بدست آورید :

$2a^2(-4a^2x)$ ، $3a^2z \cdot 2z^2$ ، $(-3x)(2x^3)$

$(-2\sqrt{3})(-5\sqrt{6})$ ، $5a^2y(-2ay^3)$ ، $(-4a^3x)(3ax^2)$

$(-3z)^2$ ، $(-2a^2)^3$ ، $3k^2(-k)^3$

$(-2\sqrt{3}x)^2$ ، $(-\sqrt[3]{3}\,x^2y)^3$ ، $(2\sqrt{2})^2(-a^2)^3$

$(-3x)^2(a^2x)(-5abx^2)$

۱۰۲- ضرب یکجمله در چند جمله - چون بجای حرفها مقدار عددی گذاریم چند جمله حرفی تبدیل بمجموع جبری چند عدد میشود و یک جمله تبدیل بیک عدد پس برای ضرب یکجمله در چند جمله میتوانیم مانند ضرب یکعدد در مجموع جبری چند عدد (نمره ۴۹) عمل کنیم از اینقرار:

یک جمله مفروض را در هر یک از جمله های چند جمله ضرب کرده حاصل ضربهای جزء را با هم جمع می کنیم

مانند

$(2a^2-3ax+4x-6)\times 2ax=$

$2a^2\times 2ax+(-3ax)\times 2ax+4x\times 2ax+(-6)\times 2ax=$

$4a^3x-6a^2x^2+8ax^2-12ax$

تمرین

عبارتهای زیر را ساده نموده بازاء $a=-2$ و $b=-1$ و $c=0$ و $x=1$ و $y=$ ... درستی ... را تحقیق کنند

برای نمونه این مثال حل میشود

مثال - میخواهیم عبارت $۲x^۲(x-y)-y(-۲x^۲+y)$ را ساده نموده بازاء مقدارهای عددی x و y درستی عمل را تحقیق کنیم

راه عمل چنین است :

$$۲x^۲(x-y)-y(-۲x^۲+y)=۲x^۳-۲x^۲y+۲x^۲y-y^۲$$
$$=۲x^۳-y^۲$$

بازاء $x=۱$ و $y=۲$ مقدار عددی حاصل $۲(۱)^۳-(۲)^۲=۲-۴=-۲$ است

و مقدار عددی عبارت مفروض نیز

$$۲(۱-۲)-۲(-۲+۲)=-۲-۲(۰)=-۲$$

میباشد

$$xy(a-b)-ab(x-y)+bc(a-x)$$

$$۲a[x(ax-by)-y(bx-ay)]$$

$$۲a\sqrt{x}(ab-b\sqrt{x}-\sqrt{x})-۵c\sqrt{y}(cy-\sqrt{y})$$

$$۲a\sqrt{x}(۵a^۲-۳b\sqrt{x})-(۴a^۲-۳b\sqrt{x})$$

$$b^۲c[(a-c)-ab(a-b)]$$

$$x^۲(a+b)-b(a-c)+a(b-x)-c(x-y)$$

مثال ـ مطلوبست محاسبهٔ عبارت.

$$P = \sqrt{3}\ [4\sqrt{12} - 2\sqrt{3} - (\sqrt{75} - \sqrt{48})]$$

ابتدا پرانتز درون کروشه را حذف میکنیم بعد $\sqrt{3}$ را در هریک از جمله های درون آن ضرب بنمائیم نتیجه میشود

$$P = 4\sqrt{36} - 2\sqrt{9} - \sqrt{225} + \sqrt{144}$$

وچون $\sqrt{36} = 6$ و $\sqrt{9} = 3$ و $\sqrt{225} = 15$ و $\sqrt{144} = 12$

بنابراین

$$P = 24 - 6 - 15 + 12 = 15$$

ونیز درین مثال میتوان پیش از ضرب در $\sqrt{3}$ هرکدام از رادیکال های درون کروشه را ساده نموده بعد ا حاصل کروشه را در $\sqrt{3}$ ضرب کنیم از نیقرار:

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3} \quad و \quad \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$$

بنابراین عبارت P چنین میشود

$$P = \sqrt{3}\ (8\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3})$$

ویا: $P = \sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} = 15$

تمرین

۱ـ حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

$$\sqrt{۲}\,(۳\sqrt{۸} + \sqrt{۱۸} + \sqrt{۵۰} - ۲\sqrt{۷۲})$$

$$(۲\sqrt{۶} - \sqrt{۱۲} - \sqrt{۲۴} + \sqrt{۴۸})\sqrt{۳}$$

$$\sqrt{۳}\,(۵\sqrt{۲۴} - ۴\sqrt{۳۲} + ۳\sqrt{۵۰} - ۲\sqrt{۵۴})$$

$$۴\sqrt{۲}\,(\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۱۸}) - \sqrt{۶}\,(۳\sqrt{۳} - ۲\sqrt{۲})$$

$$۵\sqrt{۷}\,(۳\sqrt{۷} + ۱۰\sqrt{۵}) - ۲\sqrt{۵}\,(۳\sqrt{۷} - ۵\sqrt{۵})$$

$$۲\sqrt{۲}\,\left[(۷\sqrt{۲} - ۵\sqrt{۶}) - (۳\sqrt{۸} - ۴\sqrt{۲۰})\right]$$

$$۴\sqrt{۱۰}\,\left[۲\sqrt{۲۰} + ۳\sqrt{۱۸} - (۷\sqrt{۸} + ۳\sqrt{۵})\right]$$

۲- درآمد ۱۲ روزهٔ شخصی a ریال است و مخارج ۷ روزهٔ او b ریال تعیین کنید اندوختهٔ او را در مدت x روز و وقتیکه ریال $a=۹۶$ و ریال $b=۲۸$ و $x=۱۵$ باشد پس انداز او را بدست آورید

۳- بوسیلهٔ دو مجری آب داخل استخری میشود اولی در هر سه ساعت a ذرع مکعب و دومی در هر پنج ساعت b ذرع مکعب آب داخل آن میکند این استخر دارای زیرآبیست که در هر چهار ساعت c ذرع مکعب آب آنرا خارج مینماید معلوم کنید اگر هر سه یکمرتبه باز باشند در x ساعت چند ذرع مکعب آب داخل استخر میشود

مثال - مطلوبست حل همچندی

$$2x\,(x-1) = 2x^2 + 4x - 1$$

پس از ضرب نتیجه میشود

$$2x^2 - 2x = 2x^2 + 4x - 1$$

وپس از ساده کردن جمله های متشابه دو طرف این همچندی بدست می آید

$6x = 1$ ، و از آنجا $x = \frac{1}{6}$

تمرین

همچندیهای زیر را حل کنید :

$$2(x+1) - 4 = 3(x-1) \qquad 4(3y-5) + 20 = 3(y+9)$$

$$9p - 3(2p-4) = 2(5-p) + 7$$

$$3y - 9(3y+4) = 3(y+9)$$

$$5(3a-1) - 7a = 3(a+6) - 4$$

$$x - 2(2x-3) - (x+6) = 8 - 7(2-x)$$

$$7(3x-6) + 5(x-3) + 4(17-x) = -11$$

$$3z(z-2) + 5z = z(3z-4) + 6$$

$$2y - (5y - y + 1) = -(3+y) + 15$$

مثال ـ مطلوبست حل همچندی

$$\frac{5}{6}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{7}{6}\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{7}\right) = 4 + \frac{8}{9}$$

پس از ضرب نتیجه میشود

$$\frac{5}{6}x - \frac{5}{18} + \frac{7}{30}x - \frac{1}{6} = \frac{44}{9}$$

دو طرف این همچندی را در عدد ۹۰ که کوچکترین مضرب برخه نماها است ضرب

میکنیم حاصل میشود

$$۷۵x - ۲۵ + ۲۱x - ۱۵ = ۴۴۰$$

و یا

$$۲۵x + ۲۱x = ۴۴۰ + ۲۵ + ۱۵$$

پس از ساده کردن جمله های متشابه نتیجه میشود

$$۹۶x = ۴۸۰$$

و از آنجا

$$x = ۴۸۰ : ۹۶ = ۵$$

تمرین

این همچندی را حل کنید :

$$\frac{۱}{۲}(۲۷ - x) = \frac{۹}{۲} + \frac{۱}{۱۰}(۷x - ۵)$$

$$۱ - ۳\left(۷\frac{۱}{۲} + x\right) + ۷\left(\frac{۲x}{۳} - \frac{۵}{۲}\right) + \frac{۸x}{۳} = ۵۰$$

$$\frac{x - ۱}{۷} - \frac{۲۳ - x}{۵} = \frac{x + ۴}{۳} - ۶$$

$$\frac{۸ - x}{۶} + x - ۱\frac{۳}{۲} = \frac{x + ۶}{۲} - \frac{x}{۳}$$

$$\frac{۵a - ۲}{۳} - \frac{a - ۸}{۴} = \frac{a + ۱۴}{۲} - ۲$$

$$\frac{a - ۲}{۳} - \frac{۱۲ - a}{۲} = \frac{۵a - ۳۶}{۴} - ۱$$

$$\frac{۲x - ۵}{۳} - \frac{۵x - ۳}{۴} + ۲\frac{۲}{۳} = ۰$$

$$\frac{۲z + ۱}{۳} + \frac{۲z - ۵}{۳} = ۲ + \frac{۳z - ۱}{۱۵}$$

$$\frac{۳z + ۱}{۱۳} + \frac{۲z - ۵}{۳} = \frac{۴z - ۱}{۵} + \frac{۲ - z}{۲}$$

$$\frac{۴z - ۸}{۱۰} - \frac{۲۰ - z}{۴} + \frac{۲z + ۱}{۶} = ۶\frac{۱}{۶}$$

$$\frac{3-2x}{3} - \frac{4-x}{4} = \frac{3x-3/85}{0/5}$$

$$\frac{5x-0/4}{0/3} + \frac{1/3-2x}{2} = \frac{1/8-8x}{1/2}$$

$$\frac{5a-1/5}{7} - \frac{5(0/4-2a)}{6} = \frac{9a-0/7}{4} - \frac{7a-1/1}{3}$$

$$\frac{4(13a-0/6)}{5} + \frac{3(1/2-a)}{10} = \frac{9a+0/2}{20} + \frac{5+7a}{4} + a$$

۱۰۳ـ ضرب دو چند جمله ـ چون بجای حرفها مقدار عددی قرار دهیم چند جملهٔ حرفی تبدیل بچند جملهٔ عددی میشود بنابراین برای ضرب دو چند جمله میتوان قاعدهٔ (نمرهٔ ۵۰) را بکار برد:

۱۰۴ـ قاعدهٔ ضرب دو چند جمله ـ باید هر یک از جمله های یکی از آنها در کلیه جمله های چند جملهٔ دیگر ضرب نموده حاصل ضربهای جزء را جمع جبری نمود.

راه عمل از مثالهای زیر معلوم میشود

مثال ۱ ـ مطلوبست تعیین حاصل ضرب $2x-5$ در $3x+2$ مانند حساب یکی ازین دو سازه را زیر سازهٔ دیگر نوشته عمل می کنیم بدین طریق:

$$\begin{array}{l} 2x-5 \\ 3x+2 \\ \hline 6x^2-15x \quad \text{.......... حاصل ضرب سازهٔ } 2x-5 \text{ در } 3x \\ \quad\quad +4x-10 \quad \text{.......... « « } 2x-5 \text{ در } +2 \\ \hline 6x^2-11x-10 \quad \text{.......... مجموع حاصل ضربهای جزء و حاصل ضرب کل} \end{array}$$

برای آسانی عمل چنانکه می بینید بهتر آنستکه در نوشتن حاصل ضربهای جزء جمله های متشابه

آنها زیر یکدیگر نوشته شود

مثال ۲- عبارت $2a^3-7-4a+3a^2$ را در عبارت a^2-6-5a ضرب نموده بازاء $a=2$ درستی عمل را امتحان کنید

برای آسانی این عبارتها را بحسب توانهای صعودی یا نزولی a مرتب نموده مانند مثال ۱ عمل میکنیم مثلاً اگر این دو سازه را بحسب توانهای نزولی a مرتب کنیم خواهیم داشت

$$\begin{array}{rrrrrrl}
2a^5 & +3a^4 & -4a^3 & -7a^2 & & & \\
 & -10a^4 & -15a^3 & +20a^2 & +35a & & \\
 & & -12a^3 & -18a^2 & +24a & +42 & \\
\hline
2a^5 & -7a^4 & -31a^3 & -5a^2 & +59a & +42 & \text{حاصل ضرب}
\end{array}$$

که در آن

$$\begin{array}{rl}
2a^3+3a^2-4a-7 & =16+12-8-7=13 \\
a^2-5a-6 & =4-10-6=-12 \\
\hline
 & -156
\end{array}$$

که بازاء $a=2$ حاصل ضرب چنین میشود

$$64-112-248-20+118+42=-156$$

از این دو مثال قاعدهٔ عمل ضرب دو چند جمله بدست میآید از اینقرار:

اول دو چند جمله را بحسب توانهای نزولی یا صعودی یکی از حرفها مرتب نموده آنها را زیر هم مینویسیم (بهتر آنستکه چند جمله کوچکتر یعنی آنکه عدهٔ جمله هایش کمتر است زیر چند جمله دیگر نوشته شود) بعد هر یک از جمله های پائین را در جمله های بالا ضرب میکنیم و این حاصل ضربهای جزء را هر کدام در یک سطر و بزیر یکدیگر طوری مینویسیم که جمله های متشابه در یک ستون قرار گیرد بدینطریق عمل جمع جمله های متشابه آسان میشود. بعد از جمع جبری جمله های هر ستون حاصل ضرب بدست میآید

تمرین

حاصل ضربهای زیر را بدست آورید:

$2x - 4$ و $2x^2 - 2x - 8$

$y^2 + 2y - 3$ و $3y^2 - 8y - 1$

$x^2 - 2x + 4$ و $x^3 - x - 5$

$5 - a^2 + a$ و $2a^2 - 5a^3 + a + 1$

$5x - 2a + (2a - 5x)$ و $5x - 2a - (2a - 5x)$

$2 + a^3 - 2a + 3a^2$ و $3a - 4a^2 + 6 + a^3$

$$(a-b)^2 . (a+b)^2 . (a-b+1)^2$$

$$(x^2 - 2ax + a^2)^2 \quad ; \quad (a-b)^3 \quad ; \quad (a+b)^3$$

$$(x^2y - xy^2)(x^2y + xy^2) \quad ; \quad (a-b)(a+b)$$

$$(x^2y - xy^2)(3xy - 4x^2y)(2x^2y - xy^2)$$

$$(m^2 + p^2 + q^2 - mp - mq - pq)(m + p + q)$$

مثلاً ـ مطلوبست حل تیچندی

$$(3x - 1)(2x + 5) = (2x + 3)^2 + 2x^2 - 13$$

پس از عمل ضرب نتیجه میشود

$$6x^2 + 13x - 5 = 4x^2 + 12x + 9 + 2x^2 - 13$$

وچون جمله های متشابه دو طرف را ساده کنیم حاصل میشود

$$x = 1$$

تمرین

همچندیهای زیر را حل کنید :

$$(x-4)(x+8) = 7-(2-x)(x+3)$$

$$(a+2)^2-(a+3)^2 = -17$$

$$(3x-6)(4x-8) = 12x^2-96$$

$$(x+3)(x+5) = (x+15)(x-10)$$

$$(2y-7)(3y+4) = (y-1)^2+5y^2-11$$

$$(x-5)(x+3)(x+2)-5 = (x^2-x-1)(x+1)$$

$$(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)-(x+2) = (x^2+2)^2+20$$

د ـ بخش دو عبارت جبری

۱۰۵ ـ تعریف ـ غرض از بخش کردن (تقسیم کردن) عبارت جبری a (بخشی یا مقسوم) بر عبارت جبری b (بخش‌یاب یا مقسوم علیه) پیدا کردن عبارتیست مانند c (بهر یا خارج قسمت) بقسمی که حاصل ضربش در b مساوی a گردد

پس بنا بتعریف بالا این اتحاد را خواهیم داشت

$$a = bc \qquad (1)$$

وچون خارج قسمت a بر b رامیتوان بصورت $\frac{a}{b}$ نوشت

پس خواهیم داشت

$$c = \frac{a}{b} \qquad (۲)$$

یعنی خارج قسمت a بر b برخه $\frac{a}{b}$ است که هرگاه آنرا در بخش یاب (b) ضرب کنیم بخشی (a) بدست میآید

بنابراین دو تساوی (۱) و (۲) از یکدیگر نتیجه شده اند

مثال:

$$۵x : x = \frac{۵x}{x} = ۵ \qquad \text{زیرا} \qquad ۵ \times x = ۵x$$

$$ax^۳ : x^۲ = \frac{ax^۳}{x^۲} = ax \qquad \text{،} \qquad ax \times x^۲ = ax^۳$$

$$-۲a^۵ : a^۲ = \frac{-۲a^۵}{a^۲} = -۲a^۳ \qquad \text{،} \qquad -۲a^۳ \times a^۲ = -۲a^۵$$

$$-۳ : -۴ = \frac{-۳}{-۴} = \frac{۳}{۴} \qquad \text{،} \qquad \frac{۳}{۴} \times (-۴) = -۳$$

همچنین $m^۵np^۳ : m^۳p^۲ = \frac{m^۵np^۳}{m^۳p^۲} = m^{۵-۳} \cdot n \cdot p^{۳-۲} = m^۲np$

زیرا $m^۲np \cdot m^۳p^۲ = m^۵np^۳$

و $۱۲a^۲x^۳y : -۵x^۲y = \frac{۱۲a^۲x^۳y}{-۵x^۲y} = -\frac{۱۲}{۵}a^۲x$

زیرا $-\frac{۱۲}{۵}a^۲x \cdot (-۵x^۲y) = ۱۲a^۲x^۳y$

۱۰۶ - برای یافتن ساده ترین عبارت بهر (یعنی ساده ترین عبارت $\frac{a}{b}$ (نمرهٔ ۶۰) را بکار میبریم که هرگاه بخشی و بخش یاب را در سازه ای ضرب و یا بر سازه ای تقسیم کنیم بهر تغییر نمی کند

چنانکه بهر $\frac{5x}{x}$ را میتوان بصورت سادهٔ ۵ نوشت (از تقسیم بخشی و بخش یاب بر x)

و همچنین در بخش $2a^5$ بر a^2 بهر مساوی است با $2a^3$ (از تقسیم کردن بخشی و بخش یاب بر a^2)

درین دو بخش می بینیم که ساده ترین صورت بهر عبارتیست صحیح.

و در تقسیم $3ab^2$ بر a^2b ساده ترین صورت بهر برخه ایست مساوی $\frac{3b}{a}$

و در تقسیم $5x^2y$ بر $3ab$ بهر $\frac{5x^2y}{3ab}$ است که هیچ ساده نمیشود

اینک برای بدست آوردن ساده ترین صورت خارج قسمت و عبارت جبری حالتهای زیر را در نظر میگیریم:

۱۰۷ـ حالت اوّل ـ تقسیم یک جملهٔ بر یکجملهٔ ـ برای بدست آوردن ساده ترین عبارت بهر کافیست که بخشی و بخش یاب را بر سازه های مشترک تقسیم کنیم

مانند $\frac{-2a^2x}{a} = -2ax$ و $\frac{5a^3}{a^2} = 5a$ و $\frac{-7x^2y}{-5az^2} = \frac{7x^2y}{5az^2}$

و $\frac{12a^6x^2}{-8a^2x^3} = -\frac{3a^4}{2x}$ ازین چند مثال معلوم میشود:

هرگاه بخشی شامل همهٔ سازه های بخش یاب با نمای بزرگتر یا مساوی باشد درینصورت بهر یک جملهٔ درست میشود (مانند دو مثال اوّل) و درغیر اینحالت بهر برخه خواهد بود (مانند مثالهای سوّم و چهارم.

پرسش های شفاهی

در هر یک از بخش های زیر بهر را بدست آورید:

a^6 a^{12} a^2 ۹ بر   ۱ a^5

$-xy$ بر xy^3 ، $-x^2$ بر $-x^8$

$-3a^3b^2$ ، $-27a^6b^6$ ، $-3bx^3$ ، $15ax^3$

$-4a^3b^1$ ، $-30a^6b^{13}$ ، $-4x^6y^5$ ، $-38x^6y^6$

$-50a^3x^5y^2$ ، $-25a^2x^3y^5$ ، $-9ax^3y^7$ ، $-45a^4xy^8$

$-10bx^4$ ، $5ax^2$ ، $-3b^2$ ، $2a^2$

$24xa^2y$ ، $36x^2ab^1$ ، $-15xy^2$ ، $-3x^2y$

۱۰۸- حالت دوم- تقسیم چند جمله بر یکجمله- هر یک از جمله های بخشی را بر بخش یاب تقسیم نموده (موافق فرز پیش) بهرهای جزء را جمع جبری مینمائیم

مثال ۱- در تقسیم $x^3 - x^4$ بر x^2 بهر چنین است

$$\frac{x^3 - x^4}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} - \frac{x^4}{x^2} = x - x^2$$

زیرا $(x - x^2)x^2 = x^3 - x^4$

مثال ۲- در تقسیم $15x^2y - 3x^3y^2 + 12x^3$ بر $-3xy$ بهر چنین است

$$\frac{15x^2y}{-3xy} + \frac{-3x^3y^2}{-3xy} + \frac{12x^3}{-3xy} = -5x + x^2y - \frac{4x^2}{y}$$

پرسش های شفاهی

مطلوبست تعیین بهرهای زیر:

$\frac{6x^2 - 4x}{2x}$ و $\frac{x^2y - x^3}{x^2}$

$\frac{25x^2y^2 + 30xy^3}{-5xy}$ و $\frac{8ax - 10ax^2}{-2ax}$

$$\frac{5(x+y)+b(x+y)}{x+y} \quad , \quad \frac{2(a+b)-3(a+b)^2}{a+b}$$

$$\frac{3a(3x-4)-4a(3x-4)}{3x-4}$$

$$\frac{x-y-3(x-y)}{-2(x-y)} \quad , \quad \frac{\sqrt{3x^3}-2\sqrt{3xy}}{\sqrt{3x}}$$

$$\frac{dbx-aby^2}{abc} \quad , \quad \frac{\sqrt{6}(m-2)-\sqrt{3}(m-2)}{\sqrt{3}(m-2)}$$

$$\frac{k^2(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2-2k(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{k(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

۱۰۹ ـ حالت سوم ـ تقسیم چند جمله بر چند جمله ـ برای تعیین صورت ساده بهر در ینحالت مانند حساب عمل تقسیم را بجا میآوریم

فرض میکنیم مقصود بخش کردن عدد ۹۹۲ بر ۳۱ باشد صورت عمل چنین است :

$$\begin{array}{r|l} 992 & 31 \\ \cline{2-2} -93 & 32 \\ \hline 62 & \\ -62 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

و چون

$$992 = 9 \times 10^2 + 9 \times 10 + 2$$

$$31 = 3 \times 10 + 1$$

میتوان تقسیم بالا را بدین صورت نوشت

$$\begin{array}{r|l} 9\times 10^2 + 9\times 10 + 2 & 3\times 10+1 \\ \cline{2-2} -9\times 10^2 - 3\times 10 \quad\quad & 3\times 10+2 \\ \hline +6\times 10+2 & \\ -6\times 10-2 & \\ \hline & \end{array}$$

درین تقسیم اگر بجای ۱۰ عدد کلّی a را قرار دهیم معلوم میشود که در تقسیم چند جمله $9a^2+9a+2$ بر $3a+1$ بهر مساوی $3a+2$ میباشد

صورت عمل چنین است :

$$\begin{array}{l|l} 9a^2+9a+2 & 3a+1 \\ \hline -9a^2-3a & 3a+2 \\ \hline \quad +6a+2 & \\ \quad -6a-2 & \\ \hline \end{array}$$

ازین مثال میتوان قاعدهٔ زیر را نتیجه گرفت :

۱۱۰- قاعده- پس از ساده کردن چند جملهٔ های مقسوم و مقسوم علیه آنها را نسبت بتوانهای نزولی (یا صعودی) یکی از حرفها مرتّب نموده بطریقهٔ زیر عمل مینمائیم :

جملهٔ اوّل بخششی را بر جملهٔ اوّل بخش یاب قسمت نموده بهر را در تمام جمله های بخش یاب ضرب می نمائیم و حاصل را از جمله های بخششی میکاهیم تا نخستین مانده بدست آید از نو جملهٔ اوّل ماندهٔ را بر جملهٔ اوّل بخش یاب قسمت نموده بهر را در تمام جمله های بخش یاب ضرب مینمائیم و حاصل را از جمله های این مانده کم می کنیم تا دوّمین مانده بدست آید و بهمین طریق عمل را ادامه میدهیم تا به ماندهٔ صفر و یا بمانده ای برسیم که درجه اش از درجهٔ بخش یاب کمتر باشد .

مثال ۱- مطلوبست تعیین بهر در تقسیم $a^3+2a^2b-b^3$ بر $a+b$

چون چند جمله بخشی و بخش یاب را بر حسب حرف a مرتب نموده از روی قاعدهٔ بالا عمل کنیم نتیجه میشود

$$\begin{array}{l|l} a^3 + 2a^2b \quad - b^3 & a+b \\ -a^3 - a^2b & \overline{a^2 + ab - b^2} \\ \hline \quad a^2b & \\ \quad -a^2b - ab^2 & \\ \hline \qquad -ab^2 - b^3 & \\ \qquad +ab^2 + b^3 & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

در این بخش بخشی بر بخش یاب بخش پذیر (قابل قسمت) بوده و میتوان چنین نوشت

$$a^3 + 2a^2b - b^3 = (a+b)(a^2 + ab - b^2)$$

مثال ۲ـ a^3 را بر $a-1$ تقسیم کنید

از روی قاعدهٔ بالا راه عمل چنین است

$$\begin{array}{l|l} a^3 & a-1 \\ -a^3 + a^2 & \overline{a^2 + a + 1} \\ \hline \quad +a^2 & \\ \quad -a^2 + a & \\ \hline \qquad +a & \\ \qquad -a + 1 & \\ \hline \qquad +1 & \end{array}$$

درین مثال بهر را که بصورت $\frac{a^3}{a-1}$ است میتوان چنین نوشت

$$\frac{a^3}{a-1} = a^2 + a + 1 + \frac{1}{a-1}$$

زیرا اگر دو طرف بهر را در $a-1$ (بخش یاب) ضرب کنیم a^3 (بخشی) بدست میآید

درینجا میگوئیم بخشی بر بخش یاب بخش پذیر نیست و بهر یعنی $a^2 + a + 1 + \frac{1}{a-1}$

تشکیل شده است از جزء درست $a^2 + a + 1$ و جزء برخه $\frac{1}{a-1}$. عدد ۱+ را مانده این تقسیم گویند .

تبصره - فرض میکنیم Q جزء درست بهر و R مانده تقسیم A بر B باشد بنا بر آنچه گفتیم خواهیم داشت :

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B} \quad (1)$$

اگر بخصوص $R = 0$ باشد تقسیم درست است و خواهیم داشت

$$\frac{A}{B} = Q$$

اگر دو طرف تساوی (۱) را در B ضرب کنیم این تساوی بدست میآید

$$A = BQ + R \quad (2)$$

یعنی بخشی مساویست با مجموع مانده و حاصل ضرب بخش یاب در جزء درست بهر .

و در حالتیکه مانده صفر باشد تساوی (۲) نوشته میشود

$$A = BQ.$$

یعنی بخشی مساویست با حاصل ضرب بخش یاب در بهر

تمرین

در هریک از تقسیمهای زیر بهر را بدست آورید

$a^2 + 10a + 24$ بر $a + 4$

$2p^2-3p-2$ بر $2p+1$

x^2+x-6 « $x-2$

$y^3-11y-6$ « $y+3$

$6y^2+19y-7$ « $3y-1$

$3a^2+ab-2b^2$ « $3a-b$

$9x^2+6xy-8y^2$ « $3x-2y$

$2a^3+ab-2b^2$ « $3a-2b$

$2a^3-14a^2+14a-12$ « $2a-4$

$37x+6x^3-24-23x^2$ « $2x-3$

$3y^4+11y^3-2y^2+17y-4$ « $y-3y^2-4$

$$\frac{28x^4-90x^3y+156x^2y^2+9xy^2+28y^4}{4x^2-10xy}$$

$(53a+8-52a^2+12a^3)$ بر $(4a^2-7a-1)$

$(x^3-y^3):(x\pm y)$ و $(x^3+8):(x+2)$

$(x^4-16):(x\pm 4)$ و $(27x^3+8y^3):(3x+2y)$

$(y^6\pm 1):(y\pm 1)$ و $(a^5\pm b^5):(a\pm b)$

۱۱۱ - **همچندیهای حرفی** - هرگاه در یک همچندی مقدارهای معلوم بصورت کلی یعنی بحرف نموده شده باشد همچندی را همچندی حرفی نامند

هر همچندی حرفی درجهٔ اول پس از ازمین بردن برخه نامها و ساده کردن جمله های متشابه دو طرف

بصورت کلی $b = ax$ درمیآید

برای حل این همچندی یعنی برای تعیین x ریشهٔ آن باید دو طرف را بر a (ضریب x)

تقسیم نمود (a باید مخالف صفر باشد)

تبصره - از تقسیم دو طرف تساوی $0 \times 7 = 0 \times 5$ بر صفر لازم میآید که $7 = 5$

باشد که محال است

بنا بر این نباید هیچوقت دو طرف یک تساوی را بر صفر تقسیم نمود زیرا علاوه بر اینکه نمیتوان

در تقسیم یکعدد بر صفر بهر را بدست آورد ممکن است نتیجهٔ غلطی بدهد.

مثال ۱ - مطلوبست حل همچندی

$$5x - 2a = 10a + 3x$$

مجهول را بیک طرف و معلوم را بطرف دیگر میبریم نتیجه میشود

$$5x - 3x = 10a + 2a$$

یا $2x = 12a$ و از آنجا $x = 6a$

مثال ۲ - مطلوبست حل همچندی

$$ax + 5a = a^2 + 6 + 3x$$

مانند مثال پیش نتیجه میشود $ax - 3x = a^2 - 5a + 6$

و پس از جمع دو جمله متشابه طرف اول حاصل میشود

یا
$$(a-3)x = a^2 - 5a + 6$$

$$x = \frac{a^2-5a+6}{a-3} = a-2$$

تمرین

۱- مجهولهای زیر را حل کنید

$$5ax - 10a^2 = 5ac \qquad mx + m = 5m$$

$$12a - 3(a-x) = 0 \qquad x - m = m + n$$

$$ay - (a-c) = 3a + c$$

$$3ax + 2ab = 6ab + 2ax - 3ab$$

$$mx + n^2 = 4m^2 - (mx - n^2)$$

$$ax + bx = a^2 - b^2 \quad ; \quad ax - 2a^3 - 1 = a^2 - x$$

۲- دارائی شخصی را معلوم کنید درصورتیکه مبلغ پول موجود او a ریال و وام او b ریال باشد در حالتهای مخصوص یعنی که $a > b$ و یا $a = b$ و یا $b > a$ باشد نتیجه را تعبیر کنید

۳- دو نفر اولی a ریال و دومی b ریال پول دارد اولی بدومی c ریال بدهکار است و دومی باولی d ریال مبلغ دارائی هر یک چقدر میشود و تفاوت بین دارائی آنها چه مبلغ است؟

۴- شخصی در یک روز a ریال بحساب خود در بانک گذاشت و در همان روز b ریال از بانک گرفت معلوم کنید در این روز چه مبلغ بر پس اندازش علاوه شده است. اگر $a = 250$ و $b = 520$ باشد تعبیر جواب چیست؟

۵- زمینی است زراعتی به درازای a متر و به پهنای b متر و در آن خیابانی است به پهنای ۲۵ر۱ متر که درین زمین واقع شده حساب کنید مساحت قسمت زراعتی زمین را (در حالتهای مخصوص :

$a=$۷۵ و $b=$۴۶ همچنین $a=$۱۲۵٫۱۵ و $b=$۸۲٫۴۴)

۶- باغی را به مبلغ a ریال خریدیم و بمبلغ b ریال فروختیم معلوم کنید صدی چند عمل شده است (حالتهای مخصوص $a=$۱۲۰۰۰ و $b=$۱۲۹۰۰ و همچنین $a=$۸۴۰۰ و $b=$۷۵۰۰)

۷- پارچه‌ای پس از شستن باندازهٔ $\frac{۳}{۱۰۰}$ درازایش کوتاه میشود یک توپ از این پارچه پس از شستن به درازای a متر شده است درازای آن پیش از شستن معلوم کنید (حالتهای مخصوص: $a=$۲۳٫۹۵ و $a=$۱۹٫۴)

۸- شخصی درازای مزرعه‌ای را با قدم خود اندازه گرفت خیال کرد که اگر درازای هر قدمش ۷۲ر۰ متر باشد با این حساب درازای مزرعه a متر میشود بعد درازای قدمش را بطور متوسط اندازه گرفت معلوم شد که مساوی ۷۴ر۰ متر است معلوم کنید درازای حقیقی مزرعه را

۹- درازای پارچه‌ای با متری که b سانتی متر کوتاه است a متر میباشد درازای واقعی آن چقدر است؟ (حالت مخصوص $a=$۱۵ و $b=$۳)

۱۰- اطاقی است بشکل مستطیل بدرازای a متر و به پهنای b متر میخواهیم سطح آنرا از آجری بشکل مربع بضلع ۲۰ سانتی متر فرش کنیم چند آجر لازم است؟ (حالتهای مخصوص: $a=$۱۲ و $b=$۷ همچنین $a=$۱۵ و $b=$۸)

۱۱- شخصی a ریال پول دارد اگر b ریال بیشتر میداشت میتوانست $\frac{3}{5}$ بهای خود را بپردازد معین کنید مبلغ بهای او را (حالتهای مخصوص $a=150$ و $b=75$ همچنین $a=65$ و $b=70$)

۱۲- فاصلهٔ بین دو شهر d کیلومتر است اتومبیلی با تندی a کیلومتر در ساعت مدت b ساعت حرکت نموده چقدر تا شهر دوم فاصله دارد؟ (در حالت مخصوص $d=125$ و $a=50$ و $b=3$) در جواب مسئله تحقیق کنید)

۱۳- فاصلهٔ بین دو شهر d کیلومتر است مسافری قسمتی از آن را که a برابر قسمت دیگر است پیموده معلوم کنید چند کیلومتر پیموده و چند کیلومتر دیگر باقیمانده (حالتهای مخصوص: $d=120$ و $a=3$ همچنین $d=150$ و $a=4$)

۱۴- مسافری فاصلهٔ بین دو شهر را که d کیلومتر است در مدت t ساعت می‌پیماید بدین قسم که $\frac{1}{3}$ آن را با تندی متوسط a کیلومتر در ساعت طی کرده است معلوم کنید تندی متوسط مسافر را در بقیهٔ راه (حالت مخصوص $d=180$ و $t=6$ و $a=30$)

۱۵- فاصلهٔ بین دو شهر d کیلومتر است اتومبیل A این فاصله را در t ساعت می‌پیماید اتومبیل B که ده دقیقه بعد از اتومبیل A حرکت کرده ۲۵ دقیقه زودتر از آن بشهر دوم میرسد معین کنید اولاً مدتی را که اتومبیل B در حرکت بوده ثانیاً تندی متوسط اتومبیل B را ثالثاً تفاوت تندی‌های متوسط A و B را (حالت مخصوص $d=87$ و $t=3$)

۱۶- شناگری در دقیقهٔ اول a متر و در هر دقیقهٔ بعد ۲۵ سانتی متر کمتر از دقیقهٔ پیش شنا میکند

معلوم کنید پس از ۴ دقیقه چند متر شنا کرده است و درین مدت بطور متوسط دقیقه چند متر در آب جلو رفته است

۱۷- درازای استخر شنا d متر است اگر شناگری بتواند بطور متوسط دقیقه (a - ۰٫۷) متر در آب پیش برود پس از چه مدتی درازای استخر را می پیماید (حالتهای مخصوص: d = ۶۳٫۲۵ و a = ۳۷٫۷۵ همچنین d = ۴۳٫۶۵ و a = ۳۵٫۲۵)

۱۸- باغیست بشکل مستطیل که درازای آن a متر بیش از پهنایش میباشد و پهنایش $\frac{2}{3}$ درازایش است حساب کنید درازا و پهنا و مساحت باغ را (حالتهای مخصوص: a = ۸۰ و a = ۱۲۰)

۱۹- قیمت a کیلوگرم گوشت b ریال است میدانیم که $\frac{1}{4}$ آن استخوان است معلوم کنید قیمت یک کیلوگرم گوشت بی استخوان را (حالت مخصوص a = ۸ و b = ۷۲)

۲۰- درآمد سالیانه شخصی a ریال است و مخارجش b ریال معلوم کنید پس از چند سال مبلغ c ریال پس انداز خواهد کرد؟ حالت مخصوص (a = ۱۲۰۰۰ و b = ۷۰۰۰ و c = ۱۵۰۰۰)

۲۱- مبلغ a ریال بین ۵ نفر تقسیم میشود و دو نفر آنها هر یک b ریال بیشتر سهم میبرند حساب کنید سهم هر یک را (حالت مخصوص a = ۱۵۰ و b = ۱۲٫۵)

۲۲- هر ۳۵ یارد تقریباً مساوی ۳۲ متر است معلوم کنید m متر چند یارد و y یارد چند متر است؟

۲۳- هر ۵٫۵ سانتی متر تقریباً مساوی ۲٫۱۵ اینچ است دستور تبدیل c سانتی متر را به i اینچ پیدا کنید

۲۴- مجموع سه عدد متوالی را حساب کنید در صورتیکه عدد وسط مساوی a باشد و $\frac{1}{3}$ این مجموعرا بدست آورید (حالتهای مخصوص: $a=12$ و $a=-5$ و $a=-1$ و $a=120$ و $a=0$)

۲۵- مزد روزانه پدری a ریال و مزد روزانه پسرش b ریال کمتر است مخارج آنها در روز $\frac{2}{3}$ درآمد روزانه آنها است معلوم کنید مبلغ پس انداز آنها را پس از ۵ روز (حالت مخصوص $a=25$ و $b=2$).

۲۶- درازای ضلع های مثلثی a و b و c و درازای محیط آن $2p$ است هر یک از عبارتهای $b+c-a$ و $a+b-c$ و $a+c-b$ را برحسب p و یکی از اضلاع حساب کنید.

۲۷- شخصی مقداری پارچه خریده به a ریال در فروش آن صدی پانزده خرید نفع برد مبلغ نفع و فروش او را حساب کنید (حالت مخصوص $a=245.0$).

فصل چهارم

اتحادهای مهم

۱۱۲ - چنانکه پیش گفتیم اتحاد تساوی بین دو عبارت جبری است بقسمی که چون در هر عبارت عمل های لازم را انجام دهیم دو طرف عین یکدیگر شوند. بنابراین باید دو طرف یک اتحاد بازاء هر مقدار عددی که بجای حرفها گذاشته میشود با یکدیگر مساوی شود.

چون در اعمال جبری دانستن بعضی از اتحادها لازم است بنابراین باید دانش آموزان همواره این اتحادها را که اکنون میگوئیم بخاطر داشته باشند:

۱۱۳ - اتحاد ۱ - توان دوم یک دوجمله - چون دو جمله $a+b$ و همچنین $a-b$ را بتوان ۲ رسانیم حاصل میشود:

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

بنابراین این دو اتحاد بدست میآید:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

یعنی: توان دوم یک دوجمله مساویست با مجموع توانهای دوم

دو جملهٔ آن بعلاوهٔ دو برابر حاصل ضربشان (هرجمله را باشا
گرفت).

نتیجه - از تفریق دو اتحاد بالا این اتحاد بدست میآید

$$\ldots +b)^2-(a-b)^2=4ab$$

یعنی: توان دوم مجموع دو جمله منهای توان دوم تفاض
مساویست با چهار برابر حاصل ضرب آن دو جمله.

بنابر اتحادهای بالا

$$\ldots +1)^2=a^2+2a+1$$

$$\ldots -3)^2=x^2-6x+9$$

$$\ldots a+b)^2=4a^2+4ab+b^2$$

$$\ldots x-3y)^2=4x^2-12xy+9y^2$$

$$\ldots -\sqrt{3})^2=2-2\sqrt{6}+3=5-2\sqrt{6}$$

$$\ldots +1)^2-(a-1)^2=4a$$

$$\ldots 5}+1)^2-(\sqrt{5}-1)^2=4\sqrt{5}$$

$$\ldots x+y)^2-(2x-y)^2=8xy$$

تبصرهٔ ۱ - میدانیم که دو عدد قرینه دارای یک توان دومند

$$\ldots -b)^2=(b-a)^2 \quad \text{و} \quad (a+b)^2-(a-b \ldots$$

پرسش های شفاهی

حاصل این عبارتها را بدست آورید

$$(7x - a)^2 \quad , \quad (10 - y)^2 \quad , \quad (x + 1)^2$$

$$(a + 2x)^2 \quad , \quad (2x - 1)^2 \quad , \quad (x - 2a)^2$$

$$(\sqrt{5} - 2)^2 \quad , \quad (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \quad , \quad (3x - y)^2$$

$$(2\sqrt{2} - 1)^2 \quad , \quad (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 \quad , \quad (2x - 5y)^2$$

$$(y + \sqrt{5})^2 - (y - \sqrt{5})^2 \quad , \quad (2x + 1)^2 - (2x - 1)^2$$

$$(x\sqrt{2} + y\sqrt{3})^2 - (x\sqrt{2} - y\sqrt{3})^2 \quad , \quad (2\sqrt{2} + 1)^2 - (2\sqrt{2} - 1)^2$$

تبصره ۲- از روی اتحادهای (۱) میتوان بعضی از عددها را در ذهن بتوان دوم رسانید

مانند

$$(21)^2 = (20 + 1)^2 = 400 + 40 + 1 = 441$$

پرسش های شفاهی

عددهای زیر را بتوان دوم برسانید

۴۱	۱۹	۷۱	۳۱
۷۸	۱۹۹	۱۰۱	۲۹

تبصره ۳- هرگاه بخواهیم یک سه جمله را بتوان دوم برسانیم چون دو جمله آنرا یکجمله فرض کنیم میتوانیم از روی اتحاد (۱) آنرا بتوان دوم رسانیم.

چنانکه توان دوّم سه جمله $a + b - c$ را میتوان چنین نوشت

$$(a + b - c)^2 = [(a + b) - c]^2$$

$$= (a + b)^2 - 2(a + b)c + c^2$$

و چون $(a + b)$ را بتوان دوّم برسانیم و حاصل $-2(a + b)c$ را بدست آوریم

توان دوّم سه جمله $a + b - c$ چنین میشود

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

وهمچنین برای اینکه یک چهار جمله را بتوان دوّم برسانیم کافی است که هر دو جمله

آنرا یکجمله فرض کنیم

مثال - $(a - b + c - d)^2 = [(a - b) + (c - d)]^2 =$

$$(a - b)^2 + 2(a - b)(c - d) + (c - d)^2$$

پس از انجام عمل های لازم حاصل چنین میشود

$$(a - b + c - d)^2 =$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2ad - 2bc + 2bd - 2cd$$

ازین مثالها و مثالهای دیگر این قاعده برای بدست آوردن توان دوّم یک

چند جمله نتیجه میشود :

توان دوّم یکچند جمله مُساویست با مجموع توانهای دوّم جمله های آن بعلاوهٔ دو برابر حاصل ضرب هر جمله در جمله های دیگر (هر جمله را با نشانه اش

در نظر بگیرید)

تمرین

۱- چند جمله های زیر را بتوان دوم رسانید :

$(۲b+۲-\sqrt{۳})$ $\quad (a-۲b-c)$ $\quad (x-y+۱)$

$(-a-۲b-\sqrt{۵})$ $\quad (۲x-۳y+۲z)$

$(\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-\sqrt{۵})$ $\quad (\sqrt{۲}-\sqrt{۳}+۱)$

$(۲\sqrt{۲}-۳\sqrt{۳}-۵\sqrt{۵})$ $\quad (\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}+\sqrt{۵})$

$(۲x-۳y-۲a-۳b)$ $\quad (x-y-a+۱)$

۲- درستی تساویهای زیر را تحقیق کنید :

$\sqrt{۲}+۳\sqrt{۵}=\sqrt{۴۷+۶\sqrt{۱۰}}$ $\qquad \sqrt{۷+۲\sqrt{۶}}=\sqrt{۶}+۱$

$۵-۲\sqrt{۷}=-\sqrt{۵۳-۲۰\sqrt{۷}}$ $\qquad ۲\sqrt{۷}-\sqrt{۶}=\sqrt{۳۴-۴\sqrt{۴۲}}$

$\sqrt{۳-\sqrt{۵}}=\dfrac{\sqrt{۵}-۱}{\sqrt{۲}}$ $\qquad \sqrt{۲-\sqrt{۳}}=\dfrac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۲}}$

۳- مستطیلی است به درازای a و پهنای b بر این مستطیل دو مربع بضلع a و b اضافه کنید و از سطح حاصل مربعی بضلع $a-b$ بردارید ثابت کنید که مساحت باقیمانده سه برابر مساحت مستطیل مفروض است

۱۱۴- اتحاد ۲- حاصل ضرب مجموع دو جمله در تفاضل آنها- چون دو جمله

$a+b$ را در دو جمله $a-b$ (دو عبارت $a+b$ و $a-b$ را مزدوج یکدیگر

گویند، ضرب کنیم این اتحاد بدست میآید :

$$(a+b)(a-b) = a^{۲} - b^{۲}$$

یعنی: حاصل ضرب مجموع دو جمله در تفاضل آنها مساویست با توان دوم جمله اول (کاهش یاب) منهای توان دوم جمله دوم (کاسته)

مثال-

$$(a+۲)(a-۲) = a^{۲} - ۴$$

$$(x-۲y)(x+۲y) = x^{۲} - ۴y^{۲}$$

$$(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})(\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}) = a+b-(a-b)$$

$$= a+b-a+b = ۲b$$

$$\sqrt[۳]{۸+۳\sqrt{۷}} \cdot \sqrt[۳]{۸-۳\sqrt{۷}} = \sqrt[۳]{(۸+۳\sqrt{۷})(۸-۳\sqrt{۷})}$$

$$= \sqrt[۳]{۶۴-۶۳} = \sqrt[۳]{۱} = ۱$$

پرسش های شفاهی

عبارت زیر را در مزدوج خود ضرب کنید

$۴a - b$	$۱ + ۳x$	$x + ۳$
$a^{۲} - ۵$	$۴xy - ۲$	$۷x - y$
$ax - by$	$xy - y^{۲}$	$a^{۲} + ۲x^{۲}$
$۳ - ۲\sqrt{۷}$	$۲\sqrt{۳} - ۵$	$\sqrt{۵} - \sqrt{۲}$

تمرین

حاصل عبارتهای زیر را معلوم کنید:

$$\sqrt{9+\sqrt{17}} \cdot \sqrt{9-\sqrt{17}} \qquad \sqrt[3]{2\sqrt{13}-5} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{13}+5}$$

$$\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)\left(3-\sqrt{x^2+9}\right)$$

$$\sqrt{\sqrt{y}+\sqrt{x}} \cdot \sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$\left(a\sqrt{b}-b\sqrt{a}\right)\left(b\sqrt{a}+a\sqrt{b}\right)$$

$$\sqrt[3]{a\sqrt{a}+\sqrt{a^3-x^2}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt{a}-\sqrt{a^3-x^2}}$$

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2$$

۱۱۵- اتحاد ۳- حاصل ضرب دو دوجمله‌ای که در یک جمله مشترکند.

چون دوجمله‌ای $x+a$ را در دوجمله‌ای $x+b$ ضرب کنیم چنین میشود:

$$\begin{array}{l} x+a \\ x+b \\ \hline x^2+ax \\ \quad +bx+ab \\ \hline x^2+(a+b)x+ab \end{array}$$

بنابراین اتحاد زیر بدست میآید:

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

یعنی: حاصل ضرب دو دوجمله‌ای که در یک جمله مشترکند مساویست با توان دوم جملهٔ مشترک بعلاوهٔ حاصل ضرب مجموع دو جملهٔ غیرمشترک در جملهٔ مشترک بعلاوهٔ حاصل ضرب دو جملهٔ غیرمشترک (باید هر جمله را با نشانهٔ خود در نظر گرفت).

مثال

$$(x+2)(x+3)=x^2+(2+3)x+6=x^2+5x+6$$

$$(x-5)(x-3)=x^2+(-5-3)x+15=x^2-8x+15$$

$$(x+4)(x-7)=x^2+(4-7)x-28=x^2-3x-28$$

$$(2\sqrt{b}-a)(\sqrt{b}-a)=a^2-3a\sqrt{b}+2b$$

پرسش های شفاهی

حاصل عبارتهای زیر را تعیین کنید

$(x+5)(x+7)$ $(a+1)(a+2)$

$(a-3)(a-8)$ $(y-2)(y-5)$

$(y-2)(y+2)$ $(x-8)(x+5)$

$(x-2\sqrt{2})(x+3\sqrt{2})$ $(y-2)(y+7)$

$(a^2-6a+8):(a-4)$ $(x^2+3x+2):(x+2)$

$(x^2-x-20):(x-5)$ $(a^2-a-6):(a-3)$

۱۱۶- توان سوم دوجمله. توان سوم یک دوجمله مساوی است با مجموع توانهای سوم هر جمله بعلاوه سه برابر توان دوم هر جمله در جمله دیگر (هر جمله با قید نشانه خود)

یعنی:

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$$

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$$

تمرین

۱ـ حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$(a+b)^3 - (a-b)^3 - 2b^3$$

$$(2x-5)^2 + (x-2)(x+2) - 2x(3x-5)^2$$

$$(a+b)(b+c) - (c+d)(d+a) + (a+c)(c+a)$$

۲ـ ثابت کنید که تساویهای زیر اتحادند:

$$(\sqrt{7} - \sqrt{4})(\sqrt{7} + \sqrt{4}) - (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 0$$

$$(2 - 3\sqrt{5})(2 + 3\sqrt{5}) - (\sqrt{3} - 1)^2 = 2\sqrt{3}$$

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$$

$$(a + \sqrt{x})^3 + (a - \sqrt{x})^3 = 2a^3 - 6ax$$

فصل پنجم

تجزیهٔ عبارتها بحاصل ضرب سازه ها

۱۱۷ - تعریف - هر عبارت جبری که جز برخود و یک (بدون قید نشانه) بر عبارت دیگری بخش پذیر نباشد آنرا **اوّل** گوئیم (مانند اعداد اوّل در حساب)

چند جمله های $2x+1$ و $b-2a$ و x^2+1 هر یک عبارتی اوّل هستند

بنا بر این هرگاه عبارتی غیر اوّل باشد یعنی بر عبارت دیگری بخش پذیر باشد تبدیل بحاصل ضرب دو سازه میشود (نمرهٔ ۱۱۰ تبصره)

ممکن است که هر یک از این دو سازه نیز تبدیل بحاصل ضرب دو سازهٔ دیگر شود. چون این عمل را ادامه دهیم بالاخره عبارت مفروض بحاصل ضرب چندین سازهٔ اوّل تجزیه میگردد

این عمل را **تجزیه بحاصل ضرب سازه ها** گویند

چنانکه عبارتهای ab و $12x^2$ و $4x-4$ و ax^2+a عبارتهای غیر اوّلند که اوّلی بر دو سازهٔ a و b و دومی بر x و سومی بر سازه های 3 و 4 و c و x و چهارمی بر سازه های 4 و $x-1$ و پنجمی بر سازه های a و x^2+1 بخش پذیرند و پس از تجزیه هر یک بسازه های اوّل میتوان چنین نوشت:

$ab = a \cdot b$

$x^2 = x \cdot x$

$12 c^2 x = 2 \cdot 6 \cdot c \cdot c \cdot x$

$6x - 6 = 6(x - 1)$

$ax^2 + a = a \cdot (x^2 + 1)$

تجزیه بسازه های اول یکی از قسمت های مهم جبر و مقابله است که در ساده کردن برخه ها و عملهای جبری و حل مسئله ها بکار میرود در ینجا بعضی از قاعده های ساده آن را میگوئیم:

۱۱۸ - الف - تجزیه چند جمله وقتی که جمله های آن دارای سازه مشترکی باشند -

در چند جمله $ab + ac - ad$ جمله های آن دارای سازهٔ مشترک a میباشند بنابراین چند جمله بر سازهٔ a بخش پذیر است پس:

$$ab + ac - ad = a(b + c - d)$$

یعنی چند جمله بالا بحاصل ضرب دو سازهٔ a و $(b + c - d)$ تجزیه شده است که چون این دو سازه درهم ضرب شوند چند جمله مفروض بدست میآید.

قاعده - نخست سازهٔ مشترک جمله های چند جمله را تعیین میکنیم پس از آن چند جمله مفروض را برین سازهٔ مشترک تقسیم نموده بهر این تقسیم را بدست میآوریم و عبارت مفروض مساوی حاصل ضرب آن سازه

مشترک درین بهر خواهد بود.

مثال ۱- جمله های چند جمله $۷a^۳x - ۱۵a^۲$ بر $a^۲$ بخش پذیرند یعنی $a^۲$ سازهٔ مشترک بین جمله های آن میباشد وچون آنرا بر $a^۲$ تقسیم کنیم بهر مساوی $۷ax - ۱۵$ میشود

بنابراین

$$۷a^۳x - ۱۵a^۲ = a^۲(۷ax - ۱۵)$$

مثال ۲- عبارت $\sqrt{۳}(a-b) - \sqrt{۲}(a-b)$ بر $a-b$ بخش پذیراست

و بهر $\sqrt{۳} - \sqrt{۲}$ میباشد پس:

$$\sqrt{۳}(a-b) - \sqrt{۲}(a-b) = (a-b)(\sqrt{۳} - \sqrt{۲})$$

مثال ۳- عبارت $۳ \times ۵ \times ۱۷ - ۳ \times ۵ \times ۱۴$ را حساب کنید.

ازروی تجزیه چنین خواهیم داشت

$$۳ \times ۵ \times ۱۷ - ۳ \times ۵ \times ۱۴ = ۳ \times ۵ (۱۷ - ۱۴) = ۳ \times ۵ \times ۳ = ۴۵$$

پرسش های شفاهی

عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازه ها تجزیه کنید:

$(۱۵)^۲$ $(۲۴)^۲$ $(۲۱)^۲$

$۲x - ۲$ $-۲۶a^۲by^۳$ $۱۲abx^۲$

$ax + cx$ $۵x^۲ + ۱۰x$ $ax + a$

$ax + acx$ $۲ax - ۶a$ $ac - c^۲$

$۲ac - abc$ $۱۲ax - ۱۰bx$ $۵ax^۲ - ۱۰x^۲$

$-2ax^2 + a^2x \qquad 3ax + 6bx \qquad 2ax - 4ab$

$2ay - 4y^2 + 6ay \qquad acx - 3ac - c^2 \qquad ab + ax + ay$

تمرین

۱- عبارتهای زیر را بحاصلضرب سازه ها تبدیل کنید

$ax - a^2x^2 - a^3x \qquad 3ax - 15a^2$

$ay - abc - aby \qquad 3c^2 - 12c - 18c^4$

$3c^2 - 15c + 5c^3 \qquad a^2 - 2ax + a$

$8a^2 - 4c^5 + 12a^3 - 6a^5 \qquad a^4 - a^3 + a^2 + a$

$12ax^2 - 3x\sqrt{2} + bx^2\sqrt{6} \qquad 8ax - 4bx + 12x\sqrt{5}$

۲- همچندی های زیر را حل کنید:

$my = am + bm - cm \qquad ax = am - ac$

$4ax = 2ab - 8ac + 4a^2 \qquad 2ax = 6ab - 12a^2$

۳- عبارتهای زیر را حساب کنید:

$3 \times 15 \times 12 \times 17 - 3 \times 15 \times 12^2$

$\frac{22}{7}(21)^2 + \frac{22}{7}(14)^2 - \frac{22}{7}(21 \cdot 14)$

$5742 \times (13)^2 + 5742 \times 65 + \frac{4 \times 5742 \times 13 \times 12}{2}$

۱۱۹- ب - تجزیهٔ چند جمله بوسیلهٔ دسته بندی - دسته بندی یعنی دسته

گردن جمله های یک چند جمله‌ئی بقسمی که جمله های هر دسته دارای سازهٔ مشترکی باشند :

مانند چند جملهٔ $ax+by+bx+ay$ که آنرا میتوان بدو دستهٔ $ax+bx$ و $ay+by$ تبدیل نمود دستهٔ اول دارای سازهٔ مشترک x و دستهٔ دوم دارای سازهٔ مشترک y میباشند بنابراین خواهیم داشت

$$ax+by+bx+ay=x(a+b)+y(a+b)$$

و حالا دیده میشود که طرف دوم این تساوی بر $a+b$ بخش پذیر است پس

$$ax+by+bx+ay=(a+b)(x+y)$$

بطور کلی هر عبارتی که مانند عبارت بالا یعنی بصورت $ax+by+bx+ay$ باشد بوسیلهٔ دسته بندی تجزیه پذیر میباشد.

مثال ۱ - چند جملهٔ $2bx^3-3abx^2+2cx-3ac$ را بحاصل ضرب سازه‌ها تجزیه کنید

چون چند جملهٔ مفروض را بدو دستهٔ $2bx^3-3abx^2$ و $2cx-3ac$ تبدیل کنیم و هر یک از این دو دسته را بحاصل ضرب سازه ها تجزیه نمائیم چنین خواهیم داشت

$$2bx^3-3abx^2+2cx-3ac=bx^2(2x-3a)+c(2x-3a)$$

طرف دوم این تساوی بر $2x-3a$ بخش پذیر است پس :

$$2bx^3-3abx^2+2cx-3ac=(2x-3a)(bx^2+c)$$

مثال ۲ - مطلوبست تبدیل عبارت $6+\sqrt{6}+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ بحاصل ضرب

سازه؛

در دو جمله اول و سوم عدد ۳ و در دو جمله دیگر $\sqrt{3}$ سازه مشترک است بنا براین میتوان چنین نوشت :

$$6+\sqrt{6}+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}=3(2+\sqrt{2})+\sqrt{3}(\sqrt{2}+2)$$

$$=(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{3})$$

مثال ۳- میخواهیم عبارت

$$1+xy+a(x+y)-(x+y)-a(1+xy)$$

را بحاصل ضرب سازه ها تجزیه کنیم

$xy+1$ را یکجمله فرض می کنیم بنا براین با جمله آخر دارای سازه مشترک $1+xy$ میباشد و دو جمله دیگر عبارت مفروض دارای سازه مشترک $x+y$ است پس عبارت بالا مساوی

$$(1+xy)(1-a)+(x+y)(a-1)$$

و یا مساوی $(1+xy)(1-a)-(x+y)(1-a)$ میشود.

سازه مشترک این عبارت $1-a$ است بنا براین عبارت مفروض بدین صورت درمیاید

$$(1-a)(1+xy-x-y)$$

پرانتز دوم نیز تجزیه پذیر است زیرا اگر آن را بدو دسته $xy-x$ و $1-y$ تبدیل کنیم و در دسته اول x و در دسته دوم $1-$ را سازه مشترک قرار دهیم داخل پرانتز

مساوی

$x(y-1)-(y-1)$ ویا $(x-1)(y-1)$ میشود

پس عبارت بالا بصورت حاصل ضرب

$(1-a)(y-1)(z-1)$ ویا $(1-a)(1-y)(1-z)$ درمیآید

مثال ۴۶ - مطلوبست حل همچندی

$$abx+x=abc+c-2ab-2$$

دو طرف را بحاصل ضرب سازه ها تجزیه میکنیم پس خواهیم داشت:

$$x(ab+1)=c(ab+1)-2(ab+1)$$

ویا

$$x(ab+1)=(ab+1)(c-2)$$

واگر $ab+1\neq 0$ باشد ریشهٔ همچندی چنین است:

$$x=c-2$$

تمرین

۱ - عبارتهای زیررا بحاصل ضرب سازه ها تجزیه کنید:

x^3+x^2+x+1 $\qquad$ $ax+2x+ay+2y$

$ay(a-b)+ax(b-a)$ $\qquad$ $a(c-y)-b(y-c)$

$ax+2a-bx-2b$ $\qquad$ $3ax-6bx-ay+2by$

$a^3-2ax-a^2x+2x^2$ $\qquad$ $x^2-ay+axy-x$

$a^2c - acx + acx^2 - a^2cx$

$12ax^5 - 6ax^3 - 4x^5 + 2x^3$

$10 + \sqrt{24} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}$

$4\sqrt{18} - 6\sqrt{15} - 2\sqrt{30} + 15$

۲- ab و ac مساحتهای دو مستطیلند که پهلوهای آن (a و b) و (a و c) میباشند راست گوشه ای (مربع مستطیلی) پیدا کنید که مساحتش برابر مجموع مساحتهای آنها باشد (و نیز از روی شکل برابر بودن آنها را ثابت کنید)

۳- در مسئلهٔ پیش راست گوشه ای پیدا کنید که مساحتش برابر تفاضل مساحتهای آنها باشد (و نیز از روی شکل برابر بودن آنها را ثابت کنید)

۴- a و b و c و d نمایش چهار درازا میباشند ثابت کنید که مجموع چهار مستطیل ab و ac و bc و bd را میتوان بیک راست گوشه تبدیل کرد که از حیث مساحت با مجموع آنها برابر باشد (از روی شکل نیز همین مطلب را به ثبوت رسانید)

۵- در عبارت $ac - bc + ad - bd$ ، a و b و c و d نمایش چهار درازا میباشند - اول معنای هندسی عبارت بالا را بگوئید دوم آن عبارت را بسازه های اول تجزیه نموده و تعبیر هندسی تساوی حاصل را بیان کنید.

۱۲۰- ج - تجزیهٔ سه جمله هائیکه بصورت $a^2 \pm 2ab + b^2$ میباشند- از اتحاد (۱) معلوم میشود :

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

یعنی: هرسه جمله ای که مرکب از مجموع توانهای دوم دو سازه بعلاوه (یا منهای) دو برابر حاصل ضربشان باشد بتوان دوم مجموع (یا تفاضل) آن دو تبدیل میگردد.

مثال- در سه جمله $25a^4 + 60a^2b + 36b^2$ دو جمله اول و آخر بترتیب توان دوم دو سازهٔ $5a^2$ و $6b$ میباشد و جمله $60a^2b$ برابر است با $2 \times 5a^2 \times 6b$ بنابراین این سه جمله را میتوان چنین نوشت

$$25a^4 + 60a^2b + 36b^2 = (5a^2 + 6b)^2$$

همچنین سه جمله $4x^4 + 9a^6 - 12a^3x^2$ تشکیل شده است از مجموع توانهای دوم $2x^2$ و $3a^3$ و جمله $-12a^3x^2$ که مساویست با $-2 \times 2x^2 \times 3a^3$ پس

$$4x^4 + 9a^6 - 12a^3x^2 = (2x^2 - 3a^3)^2 = (3a^3 - 2x^2)^2$$

پرسش های شفاهی

۱- بر هر یک از عبارتهای زیر جمله ای بیفزائید تا عبارت حاصل بصورت توان دوم یک دو جمله ای درآید:

$a^2 + 1$ $\qquad 1 + 16c^2$ $\qquad 12x + 36$

$y^2 - 18y$ $\qquad -16x + 64$ $\qquad 16a^2 - 16ax$

$-24ac + 9c^2$ $\qquad 16x^2 + 4y^2$ $\qquad 16x^2 - 32ax$

$8x^2 - 12cx$ $\qquad$ $9x^2 - 6x$ $\qquad$ $25a^2 + 10a$

۲- سه جمله های زیر را به توان دوم یک دو جمله تجزیه کنید

$9x^2 - 12x + 4$ $\qquad$ $x^2 - 4x + 4$

$a^2 - 14a + 49$ $\qquad$ $4y^2 - 4y + 1$

$81 - 18t^3 + t^6$ $\qquad$ $c^2 + 4 - 4c$

$x^2 + x + \frac{1}{4}$ $\qquad$ $c^8 + 2c^4 + 1$

$9a^2 - 2a + \frac{1}{9}$ $\qquad$ $4x^2 + x + \frac{1}{16}$

تمرین

۱- عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازه ها تجزیه کنید

$25x^2 - 20xy + 4y^2$ $\qquad$ $16t^2 - 8at + a^2$

$4a^2 - 28at + 49t^2$ $\qquad$ $9a^2 - 30at + 25t^2$

$144t^2 - 120at + 25a^2$ $\qquad$ $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

$x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2$ $\qquad$ $169x^2 + 78ax + 9a^2$

$121x^2 - 110cx + 25c^2$ $\qquad$ $4\,dt^8 - 4at^4 + 1$

$y^2 + y + \frac{1}{4}$ $\qquad$ $\frac{25}{16}x^2 + \frac{5}{4}x + 1$

$169a^2 - 156az + 36z^2$ $\qquad$ $121\,tz^2 - 220\,txz + 100t^2$

۲- همچندی های زیر را حل کنید :

$$ax - cx = a^2 - 2ac + c^2$$

$$ax - 2tx = a^2 - 4at + 4t^2$$

$$bx - 4x = b^2 - 8b + 16$$

$$ay - c^2 = a^2 + 2ac - cy$$

تبصره - در تجزیه یک عبارت جبری بهتر آنستکه نخست سازهٔ مشترک تمام جمله ها را اگر موجود باشد تعیین نموده پس از آن بتجزیه پرداخت

مثال ۱- عبارت $a^2x^2 - 2a^2x + a^2$ را بحاصل ضرب سازه ها تجزیه کنید.

چند جملهٔ $a^2x^2 - 2a^2x + a^2$ بر a^2 بخش پذیر است بنابراین

$$a^2x^2 - 2a^2x + a^2 = a^2(x^2 - 2x + 1)$$

سه جملهٔ درون پرانتز توان دوم $x - 1$ است پس

$$a^2x^2 - 2a^2x + a^2 = a^2(x - 1)^2$$

مثال ۲- میخواهیم عبارت $3ct - 3cx + 3at - 3ax$

بحاصل ضرب سازه ها تجزیه کنیم.

عبارت بالا را میتوان بترتیب چنین نوشت

$$3ct - 3cx + 3at - 3ax = 3(ct - cx + at - ax)$$

$$= 3[c(t - x) + a(t - x)]$$

$$= 3(t - x)(a + c)$$

تمرین

عبارت های زیر را بحاصل ضرب سازه ها تجزیه کنید:

$2c^3 - 20c^2 + 50c$

$t^5 - 4t^4 + 4t^3$

$at^2 - 70at + 245a$

$16a^3 - 40a^2t + 25at^2$

$32at^8 - 48at^6 + 18at^4$

$2at + 2ay + 32t + 32y$

$2a^5 - 2a^4 + 2a^3 - 2a^2$

$x^4 + x^3 + x^2 + x$

$30at - 15a + 12c - 24ct$

$6atx + 6btx - 10aty - 10bty$

$\pi h(R-r)^2 - \pi h(R+r)^2 + \pi hR^2$

۱۲۱ - د - تجزیهٔ عبارتیکه بصورت $a^2 - b^2$ باشد. - از اتحاد شمارهٔ (۲) چنین برمیآید:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

یعنی: تفاضل توانهای دوم دو عبارت بحاصل ضرب مجموع آن دو در تفاضلشان تجزیه میگردد.

مثال ۱ - عبارت $16x^8 - 81a^2$ را بحاصل ضرب سازه ها تجزیه

چون این عبارت بصورت $a^2 - b^2$ است خواهیم داشت:

$$16x^8 - 81a^{12} = (4x^4 + 9a^6)(4x^4 - 9a^6)$$

پرانتز دوم نیز تجزیه میشود بنابراین:

$$16x^8 - 81a^{12} = (4x^4 + 9a^6)(2x^2 + 3a^3)(2x^2 - 3a^3)$$

مثال ۲- مطلوبست محاسبهٔ $59^2 - 57^2$

از روی تجزیه حاصل آن بآسانی بدست میآید از اینقرار.

$$59^2 - 57^2 = (59 + 57)(59 - 57) = 116 \times 2 = 232$$

پرسش های شفاهی

عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازه ها تجزیه کنید:

$4t^2 - 9$ $\quad$ $4x^2 - 1$ $\quad$ $a^2 - 9$

$81t^2 - 121k^6$ $\quad$ $100x^4 - 81y$ $\quad$ $25y^2 - 36z^2$

$\frac{4}{9}x^2 - 121$ $\quad$ $z^2 - \frac{25}{64}$ $\quad$ $\frac{1}{25} - 0{,}04x$

$36^2 - 34^2$ $\quad$ $25^2 - 5^2$ $\quad$ $12^2 - 15^2$

مثال ۱- مطلوبست بدیل عبارت $(a+b)^2 - (a-b)^2$

بحاصل ضرب سازه ها.

عبارت مفروض را میتوان چنین نوشت:

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = [(a+b) + (a-b)]\,[(a+b) - (a-b)]$$

$$= (a + b + a - b)(a + b - a + b)$$

$$= 2a \cdot 2b = 4ab$$

دیده میشود که این تجزیه همان نتیجهٔ اتحاد شمارهٔ ۱۱۲ است

مثال ۲- عبارت $(3x-1)^2-(1-2y)^2$ را بحاصل ضرب سازه‌ها تجزیه کنید:

میتوان چنین نوشت

$$(3x-1)^2-(1-2y)^2 = [(3x-1)+(1-2y)][(3x-1)-(1-2y)]$$

$$= (3x-2y)(3x+2y-2)$$

تمرین

۱- عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازه‌ها تجزیه کنید:

$16a^2-9(a+b)^2$ ، $25a^4-16b^4$

$64x^2-(8x+2y)^2$ ، $16x^2-9(a-2x)^2$

$(2a-c)^2-(2a+c)^2$ ، $(a-2x)^2-(3x+c)^2$

$12(x-2y)^2-48(2x-y)^2$ ، $(4a-3b)^2-(3a-2b)^2$

۲- عبارت های زیر را حساب کنید:

137^2-37^2 ، 56^2-51^2 ، 73^2-43^2

215^2-185^2 ، 154^2-146^2 ، 114^2-64^2

۳- بازاء $\pi = \frac{22}{7}$ و $R = 11$ و $r = 7$ عبارتهای زیر را حساب کنید:

$\pi R^2 - \pi r^2$ و $\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$

مثال ۱- عبارت $a^2 - 2ab + b^2 - x^2$ را بحاصل ضرب سازه‌ها تجزیه کنید

سه جمله اول توان دوم $a - b$ است بنابراین میتوان چنین نوشت

$$a^2 - 2ab + b^2 - x^2 = (a - b)^2 - x^2$$

$$= (a - b + x)(a - b - x)$$

مثال ۲- عبارت $t^3 - t^2 - 4t + 4$ را بحاصل ضرب سازه‌ها تجزیه کنید:

میتوان بترتیب چنین نوشت

$$t^3 - t^2 - 4t + 4 = t^2(t - 1) - 4(t - 1)$$

$$= (t - 1)(t^2 - 4)$$

$$= (t - 1)(t + 2)(t - 2)$$

تمرین

۱- عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازه‌ها تجزیه کنید:

$y^2 - t^2 + x^2 - 2xy$ $4x^2 - 4x + 1 - m^2$

$1 - 4at - t^2 + 4a^2t^2$ $6xy - t^2 + y^2 + 9x^2$

$m^2 - a^2 - 2at - t^2$ $12at - 4a^2 - 9t^2 + m^2$

$x^2 - 4xt + 4t^2 - 9a^2 + 6a - 1$

$1 + 2bc + 2a - c^2 - b^2 + a^2$

$a^3 - a + a^2x - x$ $\qquad$ $2a^3x + 2a^2x - 8ax - 12x$

$t^4 - 10t^2 + 9$ $\qquad$ $t^3 + 2t^5 + t^7$

$2x^4 - 40x^2 + 200 - 2m^2$

$5a^4 + 20a^2 + 5a^5 - 20a^7$

۲- همچندی های زیر را حل کنید (بنابراینکه x مجهول باشد):

$t^5x - t^3 = tx - t$ $\qquad$ $ax + bx = a^2 - b^2$

$a^3x = a^2 - 2a + 1 + ax$ $\qquad$ $x(t-3)(t^2+9) = t^4 - 81$

۱۲۲- ه- تجزیه سه جمله درجه دوم $x^2 + px + q$

از اتحاد (۳) چنین برمی‌آید که:

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

یعنی: سه جمله $x^2 + px + q$ وقتی تجزیه پذیر بسازه های درجه اول است که p حاصل جمع دو مقدار و q حاصل ضرب همان دو باشد.

مثال ۱- سه جمله $x^2 + 3x + 2$ را تجزیه کنید.

عدد ۲ را باید تبدیل بحاصل ضرب دو مقدار نمود بطوریکه مجموعشان ۳ باشد چون حاصل جمع و حاصل ضرب هر دو مثبت هستند بنابراین دو عدد مطلوب مثبت بوده

ومساوی ۱ و ۲ میباشند پس :

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

مثال ۲ - سه جمله $a^2 - 11a + 24$ را تجزیه کنید .

حاصل ضرب دو عدد مطلوب که ۲۴ باشد مثبت است و مجموعشان یعنی ۱۱- منفی است بنابراین این دو عدد منفی میباشند برای تعیین آنها عدد ۲۴ را باید بدو سازه تجزیه نمود بطوریکه مجموعشان ۱۱ شود و چون ۲۴ تشکیل شده است از حاصل ضرب

	24×1	که درانیجا مجموعشان	۲۵ است
یا	12×2	«	۱۴ است
یا	8×3	«	۱۱ است
یا	6×4	«	۱۰ است

بنابراین می بینیم که دو عدد مطلوب ۳- و ۸- میباشد

پس $a^2 - 11a + 24 = (a-8)(a-3)$

مثال ۳ - مطلوبست تجزیه سه جمله $c^2 - c - 42$ بدو سازه درجه اول

چون حاصل ضرب دو عدد مطلوب (یعنی ۴۲-) منفی است پس نشانه آنها مختلف میباشد و چون حاصل جمعشان (یعنی ۱-) منفی است پس آنکه قدر مطلقش بزرگتر است منفی میباشد بنابراین باید ۴۲ را بدو سازه تجزیه کنیم بقسمی که تفاضلشان ۱ باشد و بعد سازه بزرگتر را منفی بگیریم :

۴۲ تشکیل شده است از:

	۱ × ۴۲	که در اینجا تفاضلشان	۴۱ است
یا	۲ × ۲۱	«	۱۹ است
یا	۳ × ۱۴	«	۱۱ است
یا	۶ × ۷	«	۱ است

پس دو عدد مطلوب ۷- و ۶ میباشند و از آنجا خواهیم داشت

$$c^2 - c - 42 = (c - 7)(c + 6)$$

تمرین

۱- عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازه ها تجزیه کنید:

$a^2 - 9a + 14$ $\qquad$ $x^2 + 4x + 3$

$x^2 - 8x + 7$ $\qquad$ $t^2 + 3t - 10$

$y^2 - 4y - 45$ $\qquad$ $t^2 - t - 6$

$-2y - y^2 + 63$ $\qquad$ $-x^2 - x + 12$

$a^2b^2 + 10abx^3 - 24x^6$

$(a + x)^2 + 3(a + x) + 2$ $\qquad$ $33a^2 - b^2x^2 - 8abx$

در این عبارت مجموع $(a+x)$ را درنظر بگیرید

۲ – تمرین های ترکیبی – عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازه ها تجزیه کنید:

$x^{3}-4x$ $\qquad$ $56t+t^{2}-t^{3}$

$3y^{2}-9y-3$ $\qquad$ $ab^{4}-7ab^{2}-18a$

$81a-18a^{3}+a^{5}$ $\qquad$ $4a^{5}-92a^{3}-200a$

$6at^{2}+3t^{2}c+18atx+9ctx$

$4a^{3}-4ay^{2}-8ayz-4az^{2}$

۳- همچندیهای زیر را بنابر آنکه x و y و z مجهول باشند حل کنید.

$(a-3)x=a^{2}-5a+6$ $\qquad$ $4x+ax=a^{2}-16$

$Ky+42=K^{2}-K-6y$

$ay+a=a^{2}+5y-2$

$ax+3ac=a^{2}+2cx+2c^{2}$

۴- با در نظر گرفتن تساویهائی مانند تساوی

$$(\sqrt{5}\pm\sqrt{3})^{2}=8\pm2\sqrt{15}$$

که در آن $8=5+3$ و $15=5\times3$ عبارتهای زیر را بحاصلضرب سازه‌ها تجزیه کنید

$5-2\sqrt{6}$ $\qquad$ $5+2\sqrt{6}$ $\qquad$ $7+2\sqrt{10}$

$6+2\sqrt{8}$ $\qquad$ $8-2\sqrt{7}$ $\qquad$ $4+2\sqrt{3}$

$22-12\sqrt{2}$ $\qquad$ $16-2\sqrt{55}$ $\qquad$ $6-4\sqrt{2}$

۱۲۳- حل بعضی از همچندیها از روی تجزیه.

مثال ۱ـ مطلوبست حل همچندی $(x-3)(x+2)=0$ برای حل این همچندی باید در نظر داشت که

شرط لازم و کافی برای اینکه حاصل ضرب چند سازه مساوی صفر باشد آنستکه دست کم یکی از سازه ها صفر باشد (شمارهٔ ۴۲)

از اینجا چنین برمیآید که یا باید $x-3=0$ باشد ویا $x+2=0$ یعنی یا $x=3$ ویا $x=-2$ دو عدد ۳ و ۲- ریشه های همچندی مفروضند.

مثال ۲ـ مطلوبست حل همچندی

$$(x-1)(2x-3)=(x-1)(2x+5)$$

اگر دو طرف همچندی را بر $x-1$ تقسیم کنیم حاصل میشود

$$2x-3=2x+5$$

ویا $-3=5$ یعنی ریشه ای برای همچندی مفروض بدست نمی آید در صورتیکه اگر x را مساوی یک بگیریم دو طرف همچندی باهم یکی میشوند یعنی ۱ ریشهٔ همچندی است برای بدست آوردن این ریشه طرف دوم را بطرف اول برده و عبارت حاصل را تجزیه می کنیم چنین خواهیم داشت:

$$(x-1)\left[2x-3-(2x-5)\right]=0$$

ویا $(x-1)(-8)=0$ بنابا صل بالا چون سازهٔ ۸- مخالف صفر است پس باید $x-1=0$ باشد و از آنجا ریشهٔ همچندی بالا $x=1$ میباشد.

۱۲۴- تبصرهٔ مهم- نباید دو طرف همچندی را بر عبارتی شامل مجهول تقسیم کرد زیرا ممکن است یک یا چند ریشهٔ همچندی از بین برود دیگر آنکه آن عبارت شامل هیچ ریشه نباشد یعنی بازا هیچ مقدار مجهول صفر نشود

بنابراین چون در دو طرف همچندی سازهٔ مشترکی که شامل مجهول باشد به بینیم نباید آنرا بدون دقت از بین برد بلکه باید همهٔ جمله ها را بیک طرف برده آنرا تجزیه نمود و ریشه های همچندی را بدست آورد.

مثال - مطلوبست حل همچندی $x^3 + x^2 = 4x + 4$

پس از تجزیهٔ دو طرف بحاصل ضرب سازه ها چنین میشود

$$x^2(x+1) = 4(x+1)$$

می بینیم دو طرف دارای سازهٔ مشترک $x+1$ است اگر همهٔ جمله ها را بیک طرف ببریم خواهیم داشت:

$$x^2(x+1) - 4(x+1) = 0$$

و یا پس از تجزیه $(x+1)(x^2-4) = 0$

و یا $(x+1)(x+2)(x-2) = 0$

پس ریشه های همچندی بالا عبارتند از ریشه های همچندی های

$x+1=0$ و $x+2=0$ و $x-2=0$

یعنی $x=-1$ و $x=-2$ و $x=2$

درصورتیکه اگر دو طرف را بر سازهٔ مشترک $x+1$ تقسیم میکردیم ریشهٔ $x=-1$ ازبین میرفت .

تمرین

همچندیهای زیر را حل کنید :

$x^2=5x$ $\qquad x^2=49$ $\qquad x^2=4$

$5x^2-25x=0$ $\qquad (x-3)^2+x-9=0$

$(x-1)^2+(2x+5)(x-1)=0$

$(3x-3)^2-(3x-2)(x-7)=0$

$x^2-4=3x+6$ $\qquad x^2-ax=5x-5a$

$(x-a)^2-(2x-1)(x-a)=0$

$(3x+2)(x-2n)-(x-2n)^1=0$

$x^2-a^2-cx+ac=0$ $\qquad y^3-9y=45-5y^2$

$x^3-ax^2=4Kx^2-4aK^2$

فصل ششم

برخه

۱۲۵ - تعریف - چنانکه میدانیم بَهر مقدار جبری a بر مقدار جبری b را بصورت برخه $\frac{a}{b}$ نویسند چنین برخه که برخه شمار و برخه نامش دو عبارت جبری باشد **برخه جبری** نامیده میشود

مثال: $\frac{-2}{3}$ و $\frac{2-x}{a-1}$ و $-\frac{a+\sqrt{2}}{\sqrt{b}-x}$

نشانه برخه (که جلوی خط برخه گذارده میشود) موافق قاعده تقسیم مثبت است اگر برخه نام و برخه شمارش دارای یک نشانه باشند والا منفی است

$$\frac{-5}{-7}=\frac{+5}{+7}=+\frac{5}{7} \qquad \frac{-3}{5}=\frac{3}{-5}=-\frac{3}{5}$$

بعکس میتوان نشانه جلوی برخه را تغییر داد بشرط اینکه نشانه برخه نام یا برخه شمار تغییر نماید

مانند

$$-\frac{x-2}{x+1}=\frac{-(x-2)}{x+1}=\frac{2-x}{x+1}$$

$$-\frac{x^2+a}{ax-1}=\frac{x^2+a}{-(ax-1)}=\frac{x^2+a}{1-ax}$$

$$\frac{2x-a}{3a-x}=-\frac{a-2x}{3a-x}=-\frac{2x-a}{x-3a}$$

پرسش های ساده

نشانه جلوی هر برخه را تغییر دهید بطوریکه مقدار برخه تغییر نکند

$\frac{-2x}{a-b}$ $\qquad$ $-\frac{x}{y}$ $\qquad$ $\frac{-a}{x}$

$\frac{4a}{2-3x}$ $\qquad$ $-\frac{3}{a-x}$ $\qquad$ $\frac{a}{-x}$

$-\frac{a-x}{a^2-b^2}$ $\qquad$ $\frac{3x-1}{2-5x}$ $\qquad$ $-\frac{a-b}{3x-2}$

$-\frac{x^2-(1-ax)}{y^2-(a-b)^2}$ $\qquad$ $\frac{a-3}{x^2-(a^2-1)}$ $\qquad$ $-\frac{2b-a}{2x-y+1}$

۱۲۶- بنا بتعریف تقسیم اگر بهره a بر b مساوی q باشد یعنی $q=\frac{a}{b}$ خواهیم داشت

$$a=bq$$

۱۲۷- در عمل های راجع ببرخه ها همواره ازین اصل استفاده می کنیم:

هرگاه برخه شمار و برخه نام را در عبارتی مخالف صفر ضرب و یا بر عبارتی مخالف صفر تقسیم کنیم در مقدار برخه تغییری رخ نمیدهد. (از خاصیت های تقسیم شمارهٔ ۶۰)

مثلاً میتوان نشانهٔ برخه نام و برخه شمار هردو را تغییر داد بدون آنکه تغییری در مقدار برخه پیدا شود زیرا مثل اینست که برخه نام و برخه شمار در عدد ۱- ضرب و یا بر آن تقسیم شده باشد

مثلاً $\frac{3}{-4}=\frac{-3}{4}$ و $\frac{-4}{-5}=\frac{4}{5}$

و $\frac{a-x}{b-x}=\frac{x-a}{x-b}$

الف - ساده کردن برخه

۱۲۸- تبدیل برخه بساده ترین صورت - ساده ترین صورت یک برخه

برخه ایست که برخه شمار و برخه نامش نسبت بهم اول باشند یعنی این دو عبارت دارای سازهٔ مشترک نباشند

مانند $\frac{-3}{4}$ و $\frac{x}{y}$ و $\frac{x-3}{x+4}$ و $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

و هرگاه برخه شمار و برخه نام نسبت بهم اول نباشند یعنی برعبارتی بخش پذیر باشند میتوان بوسیله تقسیم کردن آنها بر آن عبارت برخه را ساده نمود.

مثلاً در برخهٔ $\frac{12a^2b}{-3ab^2}$ برخه شمار و برخه نامش دارای سازهٔ مشترک $3ab$ میباشند که چون آنها را بر این سازهٔ مشترک تقسیم کنیم حاصل میشود $\frac{4a}{-b}$ این برخه ساده ترین صورت برخهٔ بالا است و همچنین در برخهٔ $\frac{a^2-b^2}{a^2+ab}$ برخه شمار و برخه نامش نسبت اول نیستند زیرا از تجزیهٔ هریک معلوم میشود که دارای سازهٔ مشترک $a+b$ میباشند از اینقرار

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+ab}=\frac{(a+b)(a-b)}{a(a+b)}=\frac{a-b}{a}$$

از اینجا قاعدهٔ زیر را برای تبدیل برخه بساده ترین صورت خود خواهیم داشت:

۱۲۹- قاعده - برای تبدیل یک برخه بساده ترین صورت خود برخه شمار و برخه نام را بحاصل ضرب سازه های اول تجزیه نموده سازه های مشترک را حذف میکنیم (یعنی آنها را بر این سازهٔ مشترک تقسیم مینمائیم)

چنانکه برای تبدیل برخهٔ $\frac{a^2-(b-c)^2}{an+bn-cn}$ بساده ترین صورت خود از روی قاعدهٔ بالا عمل میکنیم از اینقرار:

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{an+bn-cn}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{n(a+b-c)}=\frac{a-b+c}{n}$$

۱۳۰- یادآوری. اَوّلاً چنانکه گفتیم اگر برخه شمار و برخه نام را در عبارتی ضرب و یا بر آن تقسیم کنیم مقدار برخه تغییر نمی کند ولی اگر بر برخه شمار و برخه نام یک عبارت مخالف صفر بیفزائیم و یا از آن ها یک عبارت مخالف صفر کم کنیم مقدار برخه تغییر میکند.

چنانکه هرگاه از برخه شمار و برخه نام $\frac{5}{4}$ یک یکه کم کنیم حاصل مساوی $\frac{4}{3}$ و یا ۲ میشود که مخالف $\frac{5}{4}$ است و نیز اگر بر آنها یک یکه بیفزائیم حاصل مساوی $\frac{6}{4}$ و یا $\frac{3}{2}$ میشود که آن نیز مخالف $\frac{5}{4}$ است

همچنین برخهٔ $\frac{1-x}{x+1}$ ساده ترین صورت را داراست زیرا برخه شمار و برخه نامش نسبت بهم اوّلند ولی اگر از برخه شمار و برخه نام x را کم کنیم مقدار برخه مساوی $\frac{1}{1}$ یا مساوی ۱- میشود که با برخهٔ $\frac{1-x}{x+1}$ مساوی نیست زیرا این برخه بازاء مقدارهای x مقدارهای مخالف ۱- پیدا میکند.

ثانیاً باید دانست که اگر برخه شمار و برخه نام را در دو عبارت مختلف ضرب کنیم مقدار برخه تغییر میکند بخصوص اگر آنها را بتوان دوّم رسانیم مقدار برخه تغییر میکند (مگر وقتی که برخه مساوی ۱+ باشد)

پرسش های ساده

۱- برخه های زیر را ساده کنید.

$\frac{36a^3}{81ax}$ $\quad$ $\frac{-60m^2}{-90m^3}$ $\quad$ $\frac{10x^2}{25x^3}$

$\frac{3a^3x^2}{-36ax^2}$ $\quad$ $\frac{24ax^2}{60ax}$ $\quad$ $\frac{-144x^2}{120x}$

$$\frac{-14mn^2}{60m^3n^2} \qquad \frac{63a^3bc^2}{84abc^4} \qquad \frac{d\sqrt{6}}{x\sqrt{2}}$$

تمرین

هر یک از برخه های زیر را به ساده ترین صورت خود تبدیل کنید :

$$\frac{a^2+ab}{a^2-ab} \qquad \frac{ax-a}{b-bx} \qquad \frac{5x-5}{7-7x}$$

$$\frac{x^2-4}{(x-2)^2} \qquad \frac{x^3-4x}{(x+2)^2} \qquad \frac{6a^2-6ab}{3(b^2-a)^2}$$

$$\frac{x^2-x}{1-x} \qquad \frac{mx-m-x+1}{(m-1)^2}$$

$$\frac{ax+bx+cx}{ay+by+cy} \qquad \frac{ac+bc-ad-bd}{ac-bc-ad+bd}$$

$$\frac{2ac-2ad-3bc+3bd}{2ac-2ad+3bc-3bd} \qquad \frac{3x^2-3x-270}{3x^2-243}$$

$$\frac{(x-3)^2-a^2}{2x-6+2a} \qquad \frac{x^2-5x+6}{2x^2-12x+18}$$

$$\frac{6ab^2-3a^3b-3ab^3}{ab^2-a^3b} \qquad \frac{x^4-a^4}{x^4+3a^2x^2+2a^4}$$

ب - جمع جبری برخه ها

۱۳۱- جمع جبری برخه هائیکه دارای یک برخه نامند - میخواهیم دو برخه $\frac{a}{b}$ و $\frac{a'}{b}$ که دارای یک برخه نامند با هم جمع کنیم اگر مقدار این دو برخه بترتیب q و q' باشد خواهیم داشت

$$a=bq \qquad \text{و} \qquad a'=bq'$$

و میخواهیم حاصل جمع $q+q'$ را بدست بیاوریم برای این کار چون دو تساوی بالا را با هم جمع کنیم این تساوی بدست میآید

$$a + a' = bq + bq'$$

و یا

$$a + a' = b(q + q')$$

حال برای تعیین $q + q'$ کافیست دو طرف این تساوی را بر b تقسیم کنیم

$$q + q' = \frac{a + a'}{b}$$

یعنی $q + q'$ یا حاصل جمع $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b}$ برخه‌ایست مساوی $\frac{a + a'}{b}$ که برخه شمارش مجموع برخه شمارها و برخه نامش مساوی برخه نام دو برخه مفروض باشد

بنابراین قاعده زیر را خواهیم داشت:

قاعده - مجموع جبری چند برخه که دارای یک برخه نامند برخه ایست که برخه نامش همان برخه نام و برخه شمارش مجموع جبری برخه شمارهای آنها باشد

مانند $\frac{a}{x} - \frac{2a}{x} + \frac{b}{x} = \frac{a - 2a + b}{x} = \frac{-a + b}{x}$

و $\frac{a - b}{12} - \frac{b - a}{12} - \frac{2a - 3b}{12} = \frac{a - b - (b - a) - (2a - 3b)}{12} = \frac{b}{12}$

پرسش های ساده

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$\frac{3}{7} - \frac{5}{7}$ $\quad$ $\frac{4}{3} - \frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$

$\frac{y}{x} - \frac{2y}{x}$ $\quad$ $\frac{1}{n} + \frac{3}{n}$ $\quad$ $\frac{5}{12} - \frac{3}{12}$

$\frac{a + c}{ax} - \frac{c}{ax}$ $\quad$ $\frac{a - 3}{x} - \frac{a}{x}$ $\quad$ $\frac{x + 1}{x} - \frac{1}{x}$

$$\frac{a-n}{3x}-\frac{a+n}{3x} \qquad \frac{a^2+n^2}{a+n}-\frac{n^2-a^2}{a+n}$$

$$\frac{a^2-ax}{a+x}+\frac{2ax}{a+x} \qquad \frac{n^3-n^2}{n+1}+\frac{2n^2}{n+1}$$

تبصره - بعکس میتوان برخه ای راکه برخه شمارش چند جمله باشد بمجموع جبری چند برخه تبدیل نمود

مثال:
$$\frac{8a-x}{12}=\frac{8a}{12}-\frac{x}{12}=\frac{2a}{3}-\frac{x}{12}$$

$$\frac{ax+a^2}{ax}=\frac{ax}{ax}+\frac{a^2}{ax}=1+\frac{a}{x}$$

۱۳۲ - جمع جبری چند برخه که برخه نامشان یکی نباشد - برای جمع چند برخه که برخه نامشان مساوی نباشد باید برخه نامهای آنها را مساوی نمود (بدون اینکه تغییری در مقدار برخه ها حاصل شود) و مانند قاعده بالا عمل کرد.

مثال - میخواهیم دو برخه $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را با هم جمع کنیم

اگر a و b هر دو را در d (برخه نام $\frac{c}{d}$) و همچنین c و d هر دو را در b (برخه نام $\frac{a}{b}$) ضرب کنیم برخه نام آنها مساوی میشود بدون اینکه تغییری در مقدار این دو برخه حاصل شود از نیقرار:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times d}{b\times d}=\frac{ad}{bd}$$

$$\frac{c}{d}=\frac{c\times b}{d\times b}=\frac{bc}{bd}$$

پس مجموع دو برخه $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ چنین میشود:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$$

۱۳۳- قاعدهٔ کلی برای مساوی کردن برخه نامها- قاعدهٔ کلی این است که برخه شمار و برخه نام هر برخه را در حاصل ضرب برخه نامهای دیگر ضرب کنیم درین صورت برخه نام مشترک حاصل ضرب برخه نامها میشود چنانکه اگر بخواهیم برخه های $\frac{x}{-5}$ و $\frac{-a}{2}$ و $\frac{3}{y}$ را تبدیل برخه هائی کنیم که دارای یک برخه نام باشند موافق قاعدهٔ بالا بترتیب خواهیم داشت:

$$\frac{x}{-5}=\frac{x\times 2y}{-5\ 2y}=\frac{2xy}{-10y}$$

$$\frac{-a}{2}=\frac{-a\times(-5y)}{2\times(-5y)}=\frac{5ay}{-10y}$$

$$\frac{3}{y}=\frac{3\times(-10)}{y\times(-10)}=\frac{-30}{-10y}$$

این قاعده کلی است ولی در حالتهای مخصوصی که برخه نامها دارای سازه یا سازه های مشترک باشند بهتر آنستکه کوچکترین مضرب برخه نامها را بجای حاصل ضرب آنها برخه نام مشترک آنها گرفت چنانکه برای برخه نام مشترک برخه های $\frac{-5}{4x}$ و $\frac{y}{9x^2}$ و $\frac{5}{6x}$ بجای آنکه حاصل ضرب برخه نامها را برخه نام مشترک قرار دهیم بهتر آنستکه کوچکترین مضرب مشترک چون $4x$ و $9x^2$ و $6x$ را که $36x^2$ است برخه نام مشترک بگیریم و می بینیم که $36x^2$ مساوی حاصل ضرب $4x$ است در $9x$

« « « $9x^2$ « 4

« « « $6x$ « $6x$

بنابراین برای تعیین برخه شمارهای هر برخه باید برخه شمار اولی را در $9x$ ودومی را در ۴ وسومی را در $6x$ ضرب کنیم ازاینقرار:

$$\frac{-5}{4x} = \frac{-5 \times 9x}{4x \times 9x} = \frac{-45x}{36x^2}$$

$$\frac{y}{9x^2} = \frac{y \times 4}{9x^2 \times 4} = \frac{4y}{36x^2}$$

$$\frac{a}{6x} = \frac{a \times 6x}{6x \times 6x} = \frac{6ax}{36x^2}$$

۱۳۴- کوچکترین مضرب مشترک بین چند عبارت جبری. - کوچکترین مضرب بین چند عبارت جبری ساده ترین عبارتیست که بر آنها بخش پذیر باشد و برای تعیین آن باید هر یک از عبارتهای مفروض را بحاصل ضرب سازه های اول تجزیه نمود. - کوچکترین مضرب مشترک بین عبارتهای مفروض مساویست با حاصل ضرب تمام سازه های اول با نماهای بزرگتر.

مثال ۱- کوچکترین مضرب مشترک بین mx و x^2 مساوی mx^2 است

وهمچنین « « « $6a^2x$ و $4n^2x$ مساوی $12a^2n^2x^2$ است

مثال ۲- میخواهیم بین ax^2-9a و x^2-5x+6 و x^2-4x+4 کوچکترین مضرب مشترک بگیریم

بترتیب خواهیم داشت:

$$ax^2-9a = a(x+3)(x-3)$$

$$x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$$

$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

بنابراین کوچکترین مضرب بین این سه عبارت این است

$10(x-3)(x+3)(x-2)^2$

تمرین

مطلوبست تعیین کوچکترین مضرب مشترک بین عبارتهای زیر:

a و b و $a+b$

همچنین x و ax و $a+x$

« $x+3$ و $2x+6$

« $ax+a^2$ و $x+a$

« $x^2 - n^2$ و $n+x$

« x^2-4 و $6+3x$ و $x-2$

« $x-3$ و x^2-9 و x^2-5x+6

« x^2-25 و x^2-6x+5 و $x+5$

« $4a^2-1$ و $2a+1$ و a

مثال ۱ـ حاصل عبارت $x-3 + \frac{5x}{2x-6}$ را بدست آورید

این عبارت را میتوان چنین نوشت :

$$\frac{x-3}{1} + \frac{5x}{2(x-3)}$$

کوچکترین مضرب برخه نامها $2(x-3)$ است بنا براین حاصل عبارت بالا چنین است

$$\frac{2(x-3)^2+5x}{2(x-3)} = \frac{2x^2-7x+18}{2(x-3)}$$

مثال ۲- حاصل عبارت $\frac{x+1}{2x-2} - \frac{x-1}{2x+2} + \frac{4x}{1-x^2}$ رابدست آورید

برخه نامها را بحاصل ضرب سازه های اوّل تجزیه میکنیم:

$$\frac{x+1}{2(x-1)} - \frac{x-1}{2(x+1)} + \frac{4x}{(1-x)(1+x)}$$

کوچکترین مضرب مشترک برخه نامها $2(x-1)(x+1)$ است بنا براین حاصل عبارت بالا چنین میشود

$$\frac{(x+1)^2-(x-1)^2-8x}{2(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{1-x^2}$$

تمرین

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$\frac{x^2+n^2}{3x-n}+3x+n$$

$$x^2+x+1-\frac{x^2+2}{x-1}$$

$$\frac{3a}{2+b}-\frac{a}{b-2}+\frac{1}{b^2-4}$$

$$x+y^2-\frac{x^3+y^3}{x+y}-xy$$

$$x^2+x-\frac{x^4+3x^2+1}{x^2-x+1}+1$$

$$\frac{2-x}{1-2x}-\frac{2+x}{1+2x}-\frac{1-6x}{4x^2-1}$$

$$2a+3-\frac{4}{a-2}-\left(a+1-\frac{3}{a+4}\right)$$

$$y-3-\frac{3y}{y+3}-\left(y+3+\frac{3y}{y+4}\right)$$

$$ax+a-\frac{a}{x+1}-\left(ax-a-\frac{x}{x-1}\right)$$

در سه مثال بالا بهتر این است که اول پرانتز را از میان برده جمله های متشابه را جمع کنیم پس از آن بجمع جبری برخه ها بپردازیم.

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

کوچکترین برخه نام مشترک را میتوان مساوی $(a-b)(b-c)(c-a)$ گرفت.

$$\frac{y+z}{(x-y)(x-z)}+\frac{z+x}{(y-z)(y-x)}+\frac{x+y}{(z-x)(z-y)}$$

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

$$\frac{bc}{(a-c)(a-b)}-\frac{ac}{(b-c)(a-b)}-\frac{ab}{(c-a)(b-c)}$$

ج - ضرب برخه ها

۱۳۵ - میخواهیم حاصل ضرب برخهٔ $\frac{a}{b}$ را در برخهٔ $\frac{a'}{b'}$ بدست بیاوریم.

اگر $\frac{a}{b}$ را q و $\frac{a'}{b'}$ را q' بنامیم خواهیم داشت:

$$\frac{a'}{b'}=q' \quad \text{و} \quad \frac{a}{b}=q$$

ما میخواهیم حاصل ضرب qq' را بدست آوریم. از دو تساوی بالا چنین برمیآید:

$$a=bq$$

$$a'=b'q'$$

اگر دو طرف این دو تساوی را در یکدیگر ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$aa' = bb'qq'$$

برای بدست آوردن qq' دو طرف این تساوی را بر bb' تقسیم میکنیم :

$$qq' = \frac{aa'}{bb'}$$

یعنی qq' که حاصل ضرب دو برخهٔ $\frac{a}{b}$ و $\frac{a'}{b'}$ میباشد برخه ایست که برخه شمارش حاصل ضرب برخه شمارها (a و a') و برخه نامش حاصل ضرب برخه نامها (b و b') باشد.

مثال

$$\frac{2x}{x-y} \times \frac{x^2-y^2}{8} = \frac{2x(x-y)(x+y)}{8(x-y)} = \frac{x(x+y)}{4}$$

$$\frac{x^2+a^2}{x} \times \frac{x^3}{x^4-a^4} = \frac{x^3(x^2+a^2)}{x(x^4-a^4)} = \frac{x^2}{x^2-a^2}$$

۱۳۶- تبصره - چون هر عبارت درست را میتوان بشکل برخه ای نوشت که برخه شمارش همان عبارت و برخه نامش یک باشد بنا براین برای ضرب یک عبارت درست در یک برخه آن عبارت را در برخه شمار آن برخه ضرب میکنیم.

مثال:

$$-2 \times \frac{a}{x} = \frac{-2}{1} \times \frac{a}{x} = \frac{-2a}{x}$$

$$(x-1) \times \frac{2}{x+1} = \frac{2(x-1)}{x+1}$$

نتیجهٔ ۱- هرگاه برخه شمار یک برخه در عبارتی ضرب شود مقدار آن برخه در آن عبارت ضرب میشود.

نتیجهٔ ۲- از آنچه گفتیم معلوم میشود که حاصل ضرب $\frac{a}{b} \times x$ را میتوان $\frac{ax}{b}$ نوشت حال اگر برخه نام و برخه شمار $\frac{ax}{b}$ را بر x تقسیم کنیم (بفرض $x \neq 0$)

خواهیم داشت :

$$\frac{a}{b} \times x = \frac{ax}{b} = \frac{a}{\frac{b}{x}}$$

یعنی برای ضرب $\frac{a}{b}$ در x میتوان برخه نامش را بر x تقسیم نمود.

مثال:

$$\frac{a+x}{۸x^۲} \times ۲x = \frac{a+x}{\frac{۸x^۲}{۲x}} = \frac{a+x}{۴x}$$

$$\frac{۸}{y^۲-x^۲} \times (x+y) = \frac{۸}{\frac{y^۲-x^۲}{x+y}} = \frac{۸}{y-x}$$

۱۳۷ - توان یک برخه - چون توان حالت مخصوصی است از ضرب پس توان m اُم یک برخه برخه ایست که برخه شمارش توان m اُم برخه شمار آن برخه بوده برخه نامش توان m اُم برخه نام آن باشد یعنی :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

مثال:

$$\left(\frac{a-۱}{۲x}\right)^۲ = \frac{(a-۱)^۲}{۴x^۲}$$

$$\left(\frac{-۱}{x-۱}\right)^۳ = \frac{-۱}{(x-۱)^۳}$$

پرسش های ساده

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید :

$-۳ \times \left(-\frac{۴}{۹}\right)^۲$ $\qquad \frac{۵}{۶} \times \frac{۱۸}{۲۵}$ $\qquad -\frac{۱}{۴} \times \frac{۲}{۳}$

$\frac{a^۲}{n^۲} \times \left(\frac{-۲n}{a}\right)$ $\qquad \frac{a}{۲x} \times \frac{x}{a}$ $\qquad \frac{۱}{a} \times \frac{۱}{x}$

$\frac{a^۲-x^۲}{a} \times \frac{a}{a+x}$ $\qquad \frac{a^۳}{n^۲} \times \left(\frac{x}{a}\right)^۲$ $\qquad -۲a \times \left(\frac{-x}{a}\right)$

$\frac{۳x+n}{nx} \times \frac{n^۲x^۲}{۳x-n}$ $\qquad \frac{a^۲-۴}{۳x} \times \frac{۶x}{a-۲}$

$\left(\frac{n}{a+n}\right)^۲ (a+n)^۲$ $\qquad \left(\frac{a+x}{a}\right)^۲ \times a^۲$

$\frac{y-x}{a^2-b^2} \times \frac{a+b}{x-y}$ $\quad\quad$ $\frac{n^2-9}{3x^2} \times \frac{x}{n-3}$

تمرین

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$\frac{5ax}{2n^2} \times \frac{6nx}{10a^2} \times \frac{n^2a}{x^3}$ $\quad\quad$ $\left(\frac{2ax}{5n}\right)^2 \times \frac{10n}{4a^3x}$

$\frac{x}{4n^2} \cdot \left(\frac{n}{2x}\right)^2 \cdot 3\frac{1}{2}$ $\quad\quad$ $\frac{a}{b} \times \frac{a^2x}{n^2} \times \frac{b^3n^3}{ax}$

$\left(\frac{2y}{3bx}\right)^2 \times \frac{12b^3}{16c^2yx^2} \times 8c^5x^3$

$\frac{x^4}{(2x)^3} \times \left(\frac{3a}{x}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2$ $\quad\quad$ $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{2x}{n}\right)^3 \left(\frac{2n}{x}\right)^2$

$\frac{n+2}{n-2} \times \frac{n^2-4n+4}{n^2-4}$ $\quad\quad$ $\frac{6n}{x} \cdot \left(\frac{-2x}{3n}\right)^3 \left(\frac{9n^2}{4x}\right)^2$

$\frac{n^2-4}{n+3} \times \frac{2n+6}{3n-6}$ $\quad\quad$ $\frac{a+x}{a-x} \times \frac{a^2-x^2}{a^2+2ax+x^2}$

$\frac{3x-12}{ax+3a} \times \frac{a^2x+3a^2}{nx-4n}$ $\quad\quad$ $\frac{x+7}{x^2-25} \times \frac{3x-15}{ax+7a}$

$\frac{2n^2+6}{5x^4} \times \frac{10x^3}{3n^2+9}$ $\quad\quad$ $\frac{5a+5c}{an-cn} \times \frac{an^2-cn^2}{a^2+ac}$

$\frac{x^2-16}{2x^2-18} \times \frac{x^2+x-6}{x^2+x-20}$ $\quad\quad$ $\frac{x^2-x-6}{x^2-4} \times \frac{x+2}{x-3}$

۱۳۸ - حل همچندیهای برخه - مثال - مطلوبست حل همچندی

$$\frac{5x-1}{3x+3} - \frac{3x+2}{2(x-1)} = \frac{x^2-30x+2}{6x^2-6} \quad (1)$$

برخهٔ طرف دوم را بطرف اول میآوریم و مجموع طرف اول را حساب میکنیم کوچکترین برخه نام مشترک $6(x^2-1)$ است پس خواهیم داشت:

$$\frac{2(x-1)(5x-1) - 3(x+1)(3x+2) - (x^2-30x+2)}{6(x^2-1)} = 0 \quad (2)$$

یعنی بهر برخه شمار زبر برخه نام (x^2-1) ع مساوی صفر است بنابراین لازم است.
(شمارهٔ ۵۳) که برخه شمار مساوی صفر باشد* یعنی :

$$2(x-1)(5x-1)-3(x+1)(3x+2)-(x^2-30x+2)=0$$

و با پس از ساده کردن $x=2$

تبصره - چنانکه دیده میشود پس از اینکه همچندی (۱) بصورت همچندی (۲) درآمد برای حل آن کافی است تنها برخه شمارش را مساوی صفر قرار دهیم و چون این برخه شمار از ضرب کردن دو طرف همچندی (۱) در برخه نام مشترک بدست آمده پس کافی است برای آسانی از اول (پس از ساده کردن برخه ها) دو طرف همچندی (۱) را در کوچکترین برخه نام مشترک ضرب کنیم بدون اینکه آن برخه نام مشترک را بنویسیم.

مثال - مطلوبست حل همچندی

$$\frac{2x-1}{2(x-3)}=\frac{3(x-2)}{3x-1}$$

دو طرف را در $2(x-3)(3x-1)$ که کوچکترین برخه نام مشترکست ضرب میکنیم خواهیم داشت :

$$(2x-1)(3x-1)=3(x-2)\cdot 2(x-3)$$

که پس از ساده کردن جواب همچندی $x=\frac{7}{5}$ است

تمرین

---

* یا آنکه برخه نام بی اندازه بزرگتر از برخه شمار گردد که ما درین جا بدان نمیپردازیم

این همچندیها را حل کنید:

$$\frac{2x^2-1}{2x-1}=\frac{x^2+1}{x+1}$$

$$\frac{2(3x-2)}{3(2x-3)}=\frac{14}{9}$$

$$\frac{x-1}{x-3}=\frac{4-x}{5-x}$$

$$\frac{4-2x}{3}-\frac{4}{6x-3}=\frac{1/5x}{x-0/5}-\frac{4x^2}{3(2x-1)}$$

$$\frac{3x-1}{2x-6}+\frac{5x-7}{3x-9}+\frac{7x+1}{4x-12}=11$$

$$\frac{3x-5}{5x-5}+\frac{5x-1}{7x-7}+\frac{x-4}{x-1}=3$$

$$\frac{4x^2-x}{1+x}-\frac{3x}{1-x}=\frac{4x^3+2x}{x^2-1}$$

مثال - مطلوبست حل همچندی

$$\frac{8}{x-3}-\frac{4}{x-5}=\frac{5}{x-2}-\frac{1}{x-6}$$

دو طرف را در کوچکترین مضرب برخه نماها ضرب میکنیم حاصل میشود:

$$8(x-5)(x-2)(x-6)-4(x-3)(x-2)(x-6)=$$

$$5(x-3)(x-5)(x-6)-(x-3)(x-5)(x-2)$$

در طرف اول $4(x-2)(x-6)$ و در طرف دوم $(x-3)(x-5)$ سا مشترک است بنابراین خواهیم داشت

$$4(x-2)(x-6)\left[2(x-5)-(x-3)\right]=$$

$$(x-3)(x-5)\left[5(x-6)-(x-2)\right]$$

و پس از ساده کردن

$$4(x-2)(x-6)(x-7)=4(x-3)(x-5)(x-7)$$

طرف دوم را بطرف اول میبریم و چون بین آنها $4(x-7)$ سازهٔ مشترک است پس خواهیم داشت:

$$4(x-7)\left[(x-2)(x-6)-(x-3)(x-5)\right]=0$$

و یا

$$(x-7)(x^2-8x+12-x^2+8x-15)=0$$

و یا

$$-3(x-7)=0 \quad \text{و از آنجا} \quad x=7$$

تمرین

معادله های زیر را حل کنید:

$$\frac{9}{x-7}-\frac{5}{x-8}=\frac{9}{x-2}-\frac{5}{x+1}$$

$$\frac{2}{x-14}-\frac{5}{x-3}=\frac{2}{x-9}-\frac{5}{x-11}$$

$$\frac{5}{x-6}+\frac{4}{x-9}=\frac{8}{x-7}+\frac{1}{x-10}$$

$$\frac{7}{x-6}+\frac{3}{x-11}=\frac{9}{x-7}+\frac{1}{x-12}$$

$$\frac{x-5}{x-6}-\frac{x-6}{x-7}=\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}$$

$$\frac{z+8}{z+9}+\frac{z+4}{z+5}=\frac{z+9}{z+10}+\frac{z+3}{z+4}$$

$$\frac{a-2}{a-3}+\frac{a-3}{a-4}=\frac{a-1}{a-2}+\frac{a-4}{a-5}$$

$$\frac{y}{y-3}+\frac{9-y}{7-y}=\frac{y+1}{y-2}+\frac{8-y}{6-y}$$

$$\frac{2a-27}{a-14}+\frac{a-7}{a-8}=\frac{a-12}{a-13}+\frac{2a-17}{a-9}$$

د - تقسیم برخه ها

۱۳۹- میخواهیم بهر برخهٔ $\frac{a}{b}$ را بر برخهٔ $\frac{a'}{b'}$ بدست بیاوریم . اگر مانند پیش این دو برخه را بترتیب q و q' بنامیم میخواهیم $\frac{q}{q'}$ را بدست بیاوریم .

اگر دو طرف دو تساوی $a = bq$ و $a' = b'q'$ را بر هم تقسیم کنیم خواهیم داشت

$$\frac{a}{a'} = \frac{bq}{b'q'}$$

برای بدست آوردن $\frac{q}{q'}$ دو طرف تساوی بالا را در برخهٔ $\frac{b'}{b}$ ضرب میکنیم بنابراین خواهیم داشت $\frac{q}{q'} = \frac{ab'}{a'b} = \frac{a}{b} \times \frac{b'}{a'}$

یعنی : بهرِ دو برخه مساویست با حاصل ضرب برخهٔ بخشی در وارونهٔ برخهٔ بخش یاب .

مثال :

$$\frac{2}{3x} : \frac{8}{x^2} = \frac{2}{3x} \times \frac{x^2}{8} = \frac{x}{12}$$

$$1 : \frac{a}{b} = \frac{1}{1} \times \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$$

و یا

$$\frac{a}{b} : x = \frac{a}{b} : \frac{x}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{x} = \frac{a}{bx}$$

تبصره - از مثال آخر چنین برمیآید که هرگاه برخه نام در عبارتی ضرب شود مقدار آن برخه بر آن عبارت تقسیم میشود و بعکس . حال اگر در همین مثال برخه شمار و برخه نام $\frac{a}{bx}$ را بر x تقسیم کنیم خواهیم داشت :

$$\frac{a}{b} : x = \frac{a}{bx} = \frac{\frac{a}{x}}{b}$$

یعنی : برای تقسیم کردن یک برخه بر یک عبارت میتوان برخه شمار آن برخه را بر آن عبارت تقسیم نمود .

مانند

$$\frac{x^2-1}{a} : (x+1) = \frac{\frac{x^2-1}{x+1}}{a} = \frac{x-1}{a}$$

تمرین

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$-4\frac{1}{5} : 3\frac{2}{4}$ ؛ $\frac{23}{39} : \frac{-115}{26}$ ؛ $\frac{-5}{51} : \frac{10}{-17}$

$\left(\frac{2an}{x}\right)^2 : \frac{6an^2}{9x^4}$ ؛ $\frac{a^2}{n} : \frac{2a}{n^2}$ ؛ $\frac{3ab}{x} : \frac{ac}{4nx}$

$\frac{a}{b} : \frac{x}{n} : \frac{an^2}{bx^2}$

(درین مثال و مانند آن قرار میگذاریم که ابتدا خارج قسمت دو برخهٔ اوّل را بدست آورده پس از آن حاصل را بر برخهٔ سوم تقسیم کنیم)

$\frac{3an}{4bx} : \frac{6a^2n}{5b^2x} : \frac{10an^2}{8cx}$

$\frac{15}{4n^2} : \frac{5a}{2n^6} : \frac{(3n^2)^2}{12a^2}$

$\frac{12y^3}{10x^2} : \frac{6y}{5x} : \frac{4ax}{3by^2}$

$\frac{(4n^2)^2}{12} : \left(-\frac{2}{n}\right)^3 : \frac{(2n)^2}{-6}$

$\frac{10ab^2}{-21a^3} : \frac{5b}{3a^2} : -14a^4b$

$-\left(-\frac{3a}{2x}\right)^2 : -\left(-\frac{3a}{4x^2}\right) \cdot \left(-\frac{a}{x}\right)$

$\frac{24x^2y}{-12} \cdot \left(-\frac{y}{4x}\right)^2 : -\frac{(3xy)^2}{2a^2}$

$\frac{(10n^2)^2}{256} : \left(\frac{5n^2}{-4}\right)^2 : \frac{5n^2}{(8n^4)^2}$

$-\frac{a^2}{\ } : \left(-\frac{x}{\ }\right)^3 : \left(-\frac{a}{\ }\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{\ }\right)^3$

و ۲۱۰ = ج.)

$$\frac{۲n-۱}{۱۵ax^۲} : \frac{۶n-۳}{۵x}$$

$$\frac{۱-x^۲}{x^۲-۱۶} : \frac{x-۱}{x^۲-۷x+۱۲}$$

$$\frac{n^۳-n^۲-۱۲n}{n^۲-۴n+۴} : \frac{۳n^۲+n^۳}{۴-n^۲}$$

ه - مثال های ترکیبی

مثال ۱ - حاصل عبارت $\left(۳-\frac{۱}{n+۲}\right) : \left(۳-\frac{۴}{n+۳}\right)$ را بدست آورید

اول حاصل هر پرانتز را پیدا میکنیم ازینقرار:

$$۳-\frac{۱}{n+۲} = \frac{۳n+۶-۱}{n+۲} = \frac{۳n+۵}{n+۲}$$

$$۳-\frac{۴}{n+۳} = \frac{۳n+۹-۴}{n+۳} = \frac{۳n+۵}{n+۳}$$

پس از آن این دو حاصل را برهم تقسیم مینمائیم:

$$\frac{۳n+۵}{n+۲} : \frac{۳n+۵}{n+۳} = \frac{۳n+۵}{n+۲} \times \frac{n+۳}{۳n+۵} = \frac{n+۳}{n+۲}$$

تمرین

۱- حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$\left(x+\frac{n^۲}{n+x}\right) : \left(\frac{۲nx+x^۲}{n+x}-n\right)$$

$$\left(x-۳-\frac{۲۸}{x}\right) : \left(۱-\frac{۱}{x}-\frac{۲۰}{x^۲}\right)$$

$$\left(n-\frac{۳}{۴n}+۱\right) : \frac{۲n+۳}{۲n+۱}\left(\frac{۳}{۴n^۲-۱}+۳\right)$$

$$\frac{۲x-۶}{x+۲} : \left(۳+\frac{۴۵}{۴x^۲-۱۶}\right)\left(\frac{۷}{x-۳}+۲\right)$$

$$\left[\left(\frac{a}{n}-\frac{n}{a}\right):\frac{a+n}{2a^2-2an}\right]\cdot\frac{nx}{2(a-n)^2}$$

$$\frac{9n^2+9n}{9n^2-4}:\frac{n+1}{3n-2}\left(3n+4+\frac{4}{3n}\right)$$

$$\frac{4-4n^4}{3n^4-25n^2}:\frac{2n^2+2}{2n-5}\left(3n^2+\frac{8n^2-n^3}{n-1}\right)$$

$$(3n^3-75n):\left(2+\frac{11}{n}+\frac{5}{n^2}\right)\left(6n-11-\frac{2}{n}\right)$$

$$\left(\frac{-6a}{a^2-4}+\frac{3}{2-a}\right):\frac{3}{a^2-a-2}$$

$$\left(4-\frac{6}{a+1}\right):\left(8-\frac{4a-1}{a^2-1}\right)$$

$$\left(\frac{2x}{x-2}-\frac{x}{x-1}\right):\left(\frac{3x}{x-3}-\frac{2x}{x-2}\right)$$

$$\left(\frac{8}{m-x}-\frac{4}{x^2-m^2}\right):\left(\frac{1}{m-x}-\frac{1}{m+x}\right)$$

مثال ۲ - عبارت

$$\frac{\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}$$

ساده کنید

از تقسیم حاصل $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)$ بر حاصل $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)$ نتیجه بدست میآید.

ونیز میتوان برای سادگی در عمل برخه شمار و برخه نام عبارت بالا را در کوچکترین مضرب برخه نامهای جزء که مساوی $(a^2+b^2)(a^2-b^2)$ است ضرب نمود تا چنین میشود:

$$\frac{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2}{(a+b)^2(a^2+b^2)-(a-b)^2(a^2+b^2)}$$

که پس از تجزیه بحاصل ضرب سازه ها و بنا بر شمارهٔ (۱۱۳) چنین میشود

$$\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)\left[(a+b)^2-(a-b)^2\right]}$$

و یا

$$\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)\cdot 4ab} = \frac{ab}{a^2+b^2}$$

یعنی عبارت داده شده متحد است با $\frac{ab}{a^2+b^2}$

مثال ۲ - حاصل این عبارت را بدست آورید

$$\frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}}$$

برخه شمار و برخه نام این برخه را در xy کوچکترین مضرب برخه نامهای جزء ضرب میکنیم

بنا بر این خواهیم داشت:

$$\frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}} = \frac{x^2-y^2}{y\sqrt{x} - x\sqrt{y}}$$

تمرین

۱- حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$\frac{\frac{3}{4} + \frac{2}{5}}{\frac{3}{4} - \frac{2}{5}} \qquad \frac{\frac{7}{3} - 1}{\frac{4}{3} + 1}$$

$$\frac{\frac{6}{x} - 5 + x}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2x} - \frac{6}{x^2}} \qquad \frac{\frac{5}{6} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{\frac{11}{12} - \frac{7}{4} - \frac{3}{2}}$$

$$\frac{\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}}{\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}} \qquad \frac{x - 3 - \frac{30}{x-2}}{x - 1 - \frac{20}{x-2}}$$

$$\frac{۱}{۴-\frac{۳}{x+\frac{x}{۱-x}}}$$

$$\frac{۱-\frac{a^۳}{b^۳}}{\frac{۱}{b^۲}-\frac{a}{b^۳}}$$

$$۱-\frac{۱}{۱+\frac{۱}{a}}$$

$$۲+\frac{۱}{۵+\frac{۱}{۶+\frac{۱}{۳}}}$$

$$x-\frac{y}{۱+\frac{۱}{۱+\frac{y}{x}}}$$

$$a-\frac{a-۲b}{۲-\frac{a+b}{a-b}}$$

$$\frac{\frac{۲}{b+c}-\frac{۱}{b}}{c+\frac{bc}{c-۲b}}+\frac{\frac{۲}{b+c}-\frac{۱}{c}}{b+\frac{bc}{b-۲c}}$$

$$\frac{\frac{۲yz}{y+z}-y}{\frac{۱}{z}+\frac{۱}{y-۲z}}+\frac{\frac{۲yz}{y+z}-z}{\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z-۲y}}$$

$$\frac{x^۳+y^۳}{y-\frac{x}{۱+\frac{x}{y-x}}}-\frac{y^۳-x^۳}{y+\frac{x}{۱-\frac{x}{x+y}}}$$

$$\frac{a+۲-\frac{۱}{a+۲}}{a+۲-\frac{۴}{a+۵}}:\frac{a+۴-\frac{۱}{a+۴}}{a+۴+\frac{۱}{a+۴}}$$

$$\left(\frac{۵+۲\sqrt{۳}}{۴-\sqrt{۳}}\right)^۲\cdot\left(\frac{۲-\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۱}\right)^۲$$

$$\frac{m^2n - mn^2}{a^2b - ab^2} : \frac{m^3n^2 - m^2n^3}{a^3b^2 - a^2b^3}$$

$$\frac{\left(3a + 4 - \frac{4}{3a}\right)\frac{3a-2}{a-1}}{\frac{9a^2-4}{9a^2+9a}}$$

$$\frac{1 + \frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}}{1 - \frac{x^2+y-z^2}{2xy}}$$

$$\frac{\frac{x}{1+\frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x+1}}{\frac{x}{1-\frac{1}{x}} - x - \frac{1}{x-1}}$$

$$\left(\frac{\frac{x}{y}+2}{\frac{x}{y}+1} + \frac{x}{y}\right) : \left(\frac{x}{y} + 2 - \frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}+1}\right)$$

$$\frac{\frac{1-b}{1+b} - \frac{1-a}{1+a}}{1 + \frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}} : \frac{1+ab}{a-b}$$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{x - \frac{1}{x}} : \frac{1}{1+x}$$

$$\left(2 - \frac{3n}{m} + \frac{9n^2-2m^2}{m^2+2mn}\right) : \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m-2n-\frac{4n^2}{m+n}}\right)$$

۲- مقیاس نقشه‌ای $\frac{1}{80000}$ است یعنی هر ۸۰ کیلومتر در نقشه یک متر نمایش داده میشود حال اگر فاصله دو شهر a کیلومتر باشد در این نقشه چقدر فاصله خواهند داشت؟ و بالعکس اگر فاصله دو شهر در این نقشه b میلی‌متر باشد حقیقةً فاصله این دو شهر چقدر است؟ (حالت مخصوص a = ۱۶۰ و b = ۵۰)

۳- $\frac{2}{3}$ پارچه‌ای a ریال ارزش دارد تعیین کنید ارزش $\frac{5}{8}$ آنرا (حالت مخصوص a = ۱۲۰)

۴- دو کارگر کاری را در a روز انجام میدهند اولی به تنهائی آنرا در b روز تمام میکند معلوم کنید کارگر دوم به تنهائی در یک روز چقدر کار را تمام میکند؟ (حالت مخصوص a = ۱۲ و b = ۱۸)

۵- فاصله دو شهر a کیلومتر است ترنی این فاصله را با تندی متوسط ۴۵ کیلومتر در ساعت می‌پیماید اگر فرض کنیم ماشین در راه بین دو شهر مدت نیم ساعت توقف کند پس از چه مدتی از شهر اول بشهر دوم میرسد؟

۶- تندی متوسط ماشینی در پیمودن راهی a کیلومتر در ساعت است یک قسمت این راه را با تندی b کیلومتر در ساعت پیموده حساب کنید تندی ماشین را در بقیه راه.

۷- یکدسته هواپیما باید در ساعت ۱۷ بر فراز شهری که بفاصله a کیلومتر است آشکار شوند اگر تندی متوسط آنها b کیلومتر در ساعت باشد چه ساعتی باید حرکت کنند؟ (حالت مخصوص a=۷۰۰

۸ - در مسئلهٔ پیش فرض میکنیم $a = 600$ کیلومتر و $b = 200$ کیلومتر در ساعت باشد اگر هوا منقلب بوده و باد مخالفی به تندی ۲ کیلومتر در ساعت بوزد چند دقیقه زودتر باید حرکت کنند تا در موقع مقرّر بشهر منظور برسند؟

۹ - شخصی a ریال بدهکار است $\frac{1}{4}$ بدهی خود را میپردازد و پس از مدّتی مجبور میشود که مبلغی مساوی $\frac{1}{5}$ آنچه که بدهکار است قرض کند معلوم کنید بدهی او چه مبلغ میشود و در نتیجه این دو عمل چه مبلغی از بدهی خود را ادا کرده است؟ (حالت مخصوص $a = 150$)

۱۰ - بنائی میتواند به تنهائی کار اثری را a روزه بسازد بنای دیگر به تنهائی همان کار را b روزه تحویل میدهد پس از اینکه بنای دوم یک روز کار کرد هر دو را باین کار میگماریم ساختمان کار اثر چند روزه تمام میشود؟ (حالت مخصوص $a = 4$ و $b = 6$)

۱۱ - بنا بدستور مهندس ساختمان a متر مکعب مخلوط ماسه و سیمان به نسبت $\frac{1}{3}$ تهیه شده (یعنی در سه قسمت مخلوط یک قسمت سیمان و دو قسمت ماسه میباشد) اتفاقاً مهندس تغییر رای داده میخواهد به نسبت $\frac{1}{5}$ باشد چه مقدار ماسه باید به مخلوط افزوده شود؟ (حالت مخصوص $a = 2$)

۱۲ - در ایستگاه بنزین فروشی برای پر کردن مخزن زیرزمینی دو دهنه از لوله موجود است اوّلی مخزن را به تنهائی در سه ربع ساعت پر میکند و برای مواقع عادی است دوّمی آنرا در یکساعت و ربع پر میکند و یدکی است در روز سوم اسفند که مصرف بنزین زیاد است میخواهند هر دو دهنه را بکار برند معلوم کنید پر کردن مخزن چه اندازه طول خواهد کشید؟

بخط محمد افضلی